TRẦN VĂN TÀI – HỨA LÂM PHONG

(GV CHUYÊN LUYỆN THI THPT QUỐC GIA)

ẤN PHẨM NĂM 2016

SOI KÍNH LÚP HÌNH HỌC PHẲNG OXY

FULL & FREE

- 30 TÍNH CHẤT HÌNH PHẲNG THƯỜNG GẶP
- PHÂN DẠNG BÀI TOÁN HÌNH PHẲNG
- TRÍCH ĐỀ THI THỬ MỚI NHẤT 2016
- ĐÁP ÁN CHI TIẾT

NHÀ XUẤT BẢN VÌ CỘNG ĐỒNG

A-CHỨNG MINH MỘT SỐ TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

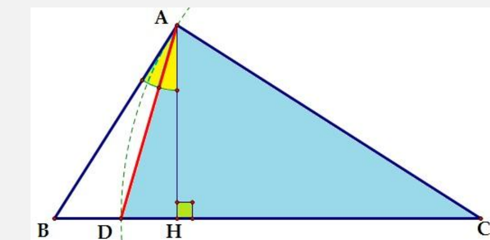
TAM GIÁC – TỨ GIÁC – ĐƯỜNG TRÒN.

Để giúp bạn đọc rèn luyện thêm cho mình những kỹ năng trong quá trình chứng minh một số tính chất hình học, tác giả bổ sung thêm vào chuyên đề mục sau. Ngoài cách chứng minh đã nêu có thể có thêm những cách chứng minh khác nữa. Điều này tùy thuộc vào khả năng tư duy và lĩnh hội cũng như sở trường của mỗi người. Tựu trung lại thì hướng chứng minh vẫn xuất phát từ 4 con đường chính:

*Một là, **sử dụng "các tính chất hình học thuần túy của THCS".***
*Hai là, **sử dụng phương pháp "véctơ thuần túy" (lớp 10).***
*Ba là, **sử dụng phương pháp tọa độ hóa kết hợp "chuẩn hóa số liệu".***
*Bốn là, **sử dụng phương pháp tổng hợp (kết hợp các cách trên).***

Tính chất 1: *Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ $AH \perp BC$ tại H. Đường tròn $(C; AC)$ cắt đoạn thẳng BH tại D. CMR: AD là tia phân giác của góc BAH.*

Hình vẽ



AD là phân giác góc BAH $\xrightarrow{dpcm} \measuredangle BAD = \measuredangle DAH$

Hướng dẫn chứng minh:

Do $CA = CD \Rightarrow \Delta CAD$ cân tại C.

$\Rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ADC$

Mặt khác, ta lại có:

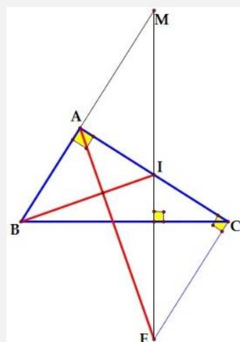
$$\begin{cases} \measuredangle CAD + \measuredangle BAD = 90^0\ (gt) \\ \measuredangle ADC + \measuredangle DAH = 90^0\ (gt) \end{cases}$$

$\Rightarrow \measuredangle BAD = \measuredangle DAH$

$\Rightarrow AD$ là phân giác góc BAH

Tính chất 2: *Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$. Gọi I là trung điểm cạnh AC. Qua I kẻ đường thẳng d_1 vuông góc với BC, qua C kẻ đường thẳng d_2 vuông góc AC, d_1 cắt d_2 tại E. CMR: $AE \perp BI$.*

Hình vẽ



Hướng dẫn chứng minh:

Gọi $M = IE \cap AB$.

Do $\begin{cases} CI \perp MB \\ MI \perp BC \end{cases} \Rightarrow I$ là trực tâm của $\Delta BMC \Rightarrow BI \perp MC\ (1)$

Vì $IA = IC \Rightarrow \Delta AIM = \Delta ICE\ (c-g-c)$

$\Rightarrow IM = IE$

Do đó $AMCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE // MC\ (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow BI \perp AE$

Tính chất 3: *Cho đường tròn $(O; R)$ và AB là dây cung của đường tròn đó $(AB < 2R)$, M là điểm thuộc cung lớn AB $(M \neq A, M \neq B)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB. CMR: $\measuredangle AMH = \measuredangle OBM$.*

Hình vẽ

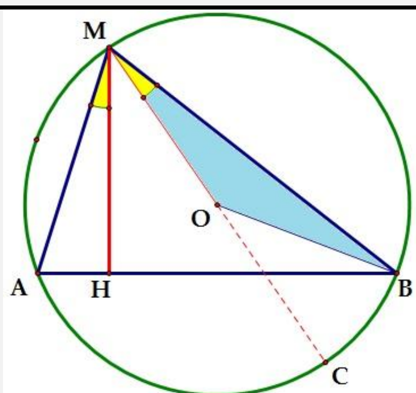
Hướng dẫn chứng minh:

Vẽ đường kính MC của đường tròn (O) $\Rightarrow \measuredangle MBC = 90^0$

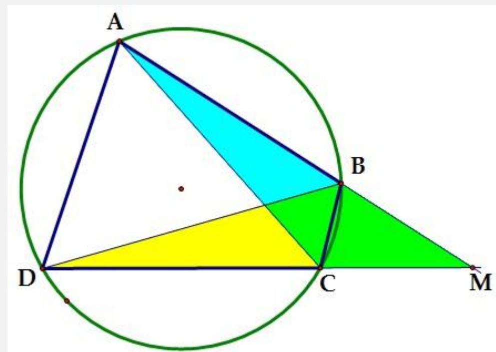
Xét ΔAHM và ΔMBC có:

- $\measuredangle HAM = \measuredangle MCB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM).
- $\measuredangle MBC = \measuredangle AHM = 90^0\ (cmt)$

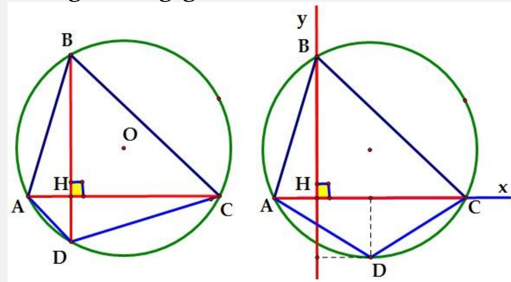
$\Rightarrow \Delta AHM \sim \Delta CMB\ (g-g)$

 Kéo dài MO cắt (O) tại điểm thứ 2 là $C \xrightarrow{dpcm} \Delta AHM$ đồng dạng ΔCMB	$\Rightarrow \measuredangle AMH = \measuredangle CMB = (\measuredangle BMO)$ Mà ΔOMB cân tại $O(OB = OM = R)$ $\Rightarrow \measuredangle BMO = \measuredangle OBM$ $\Rightarrow \measuredangle AMH = \measuredangle OBM(dpcm)$

Tính chất 4: *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), gọi M là giao điểm AB và CD. Khi đó CMR: $MB.MA = MC.MD$*

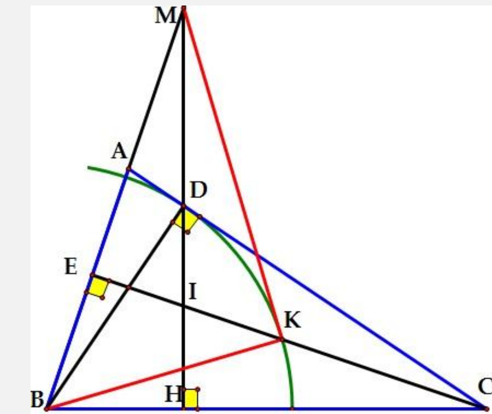
Hình vẽ Đây cũng là địng nghĩa phương tích của 1 điểm đối với một đường tròn. $MB.MA = MC.MD = \wp_{(O)}M = R^2$	***Hướng dẫn chứng minh:*** Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \measuredangle CAB = \measuredangle DBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC) Xét ΔACM và ΔDMB có $\begin{cases} \measuredangle CAB = \measuredangle DBC(cmt) \\ \measuredangle AMD : chung \end{cases}$ $\Delta ACM \sim \Delta DBM(g-g)$ $\Rightarrow \frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$ $\Rightarrow AM.BM = CM.DM(dpcm)$

Tính chất 5: *Cho tứ giác $ABCD$, khi đó $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$* ***(định lý 4 điểm)***

Hình vẽ Từ kết quả của tính chất trên, ta có thể sử dụng để chứng minh 2 đường thẳng vuông góc. 	***Hướng dẫn chứng minh:*** Dựng hệ trục Hxy như hình vẽ. Đặt $A(a;0), C(c;0), B(0;b)$. Giả sử: $D(m;n)$ Ta có $AB^2 = a^2 + b^2$ $CD^2 = c^2 - 2cm + m^2 + n^2$ $AD^2 = a^2 - 2am + m^2 + n^2$ $BC^2 = b^2 + c^2$ Từ 4 đẳng thức trên ta có: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Rightarrow cm = am$ Vì $a \neq c \Rightarrow m = 0 \Rightarrow D(0;n) \in$ trục tung $\Leftrightarrow AC \perp BD$

Tính chất 6: *Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có ba góc nhọn và hai đường cao BD, CE. Vẽ đường tròn tâm B bán kính BD cắt đoạn thẳng CE tại K. Qua D vẽ đường thẳng BC cắt đường thẳng BA tại M, cắt EC tại I. CMR: $MK \perp BK$.*

Hình vẽ



$\xrightarrow{dpcm} \Delta BEK$ **đồng dạng** ΔBKM

$\Rightarrow \measuredangle BEK = \measuredangle BKM = 90^0$

Do đó ta cần chứng minh

$BE.BM = BK^2$

Hướng dẫn chứng minh:

Gọi $H = DI \cap BC$. Ta có:

- $\begin{cases} \measuredangle BEC = \measuredangle BHM = 90^0\ (gt) \\ \measuredangle EBC\ chung \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta BEC \sim \Delta BHM\ (g-g)$

$\Rightarrow BE.BM = BH.BC\ (1)$

ΔBCD vuông tại D, DH là đường cao $\Rightarrow BH.BC = BD^2\ (2)$

Mà $BD = BK = (R) \Rightarrow BE.BM = BK^2$

- $\begin{cases} \dfrac{BE}{BK} = \dfrac{BK}{BM}\ (cmt) \\ \measuredangle EBK\ chung \end{cases}$

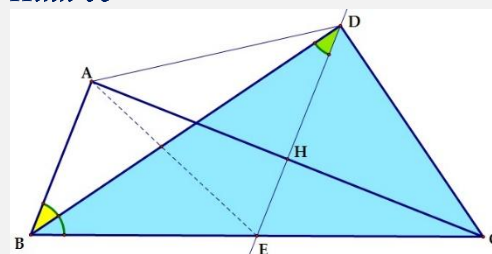
$\Rightarrow \Delta BEK$ **đồng dạng** $\Delta BKM\ (g-g)$

$\Rightarrow \measuredangle BEK = \measuredangle BKM = 90^0$

$\Rightarrow MK \perp BK$.

Tính chất 7: *Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường phân giác của góc ABC cắt đường trung trực của đoạn thẳng AC ở D. CMR: ΔDBC vuông.*

Hình vẽ



Ta sử dụng tính chất đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền thì là tam giác vuông.

Hướng dẫn chứng minh:

Gọi E là trung điểm BC, do ΔABC vuông tại $A \Rightarrow EA = EC$

Suy ra E thuộc đường trung trực cạnh $AC \Rightarrow DE \perp AC$

Mà $AB \perp AC \Rightarrow AB // DE$

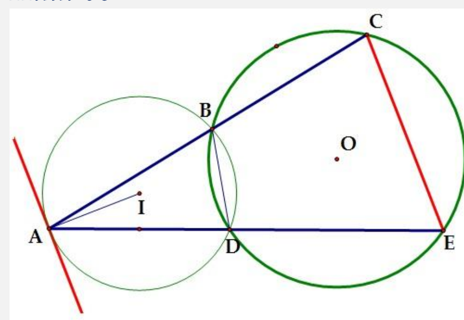
$\Rightarrow \measuredangle BDE = \measuredangle ABD = (\measuredangle DBE)$

$\Rightarrow \Delta DBE$ cân tại $D \Rightarrow ED = BE = \dfrac{BC}{2}$

$\Rightarrow \Delta DBC$ vuông tại D.

Tính chất 8: *Cho điểm A ở ngoài đường tròn (O). Vẽ cát tuyến ABC, ADE của đường tròn (O). Ax là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. CMR: $Ax // DE$.*

Hình vẽ



Để chứng minh song song, ta sử dụng tính chất so le trong của 2 góc bằng nhau, đồng thời sử dụng các mối liên hệ của các góc trong đường tròn, tứ

Hướng dẫn chứng minh:

Ta có $\measuredangle xAB = \measuredangle ADB$

(góc giữa tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Mà $\measuredangle ADB = \measuredangle BCE$

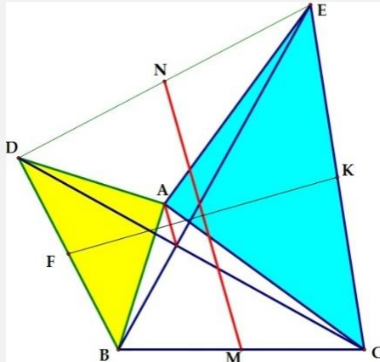
(do tứ giác $BCED$ nội tiếp có góc ngoài bằng góc đối trong)

$\Rightarrow \measuredangle xAB = \measuredangle BCE$ (vị trí so le trong) $\Rightarrow Ax // CE$.

giác nội tiếp.

Tính chất 9: *Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$, dựng về phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABD vuông cân tại A, tam giác ACE vuông cân tại A. Gọi I là giao điểm BE và CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, DE. Chứng minh rằng $AI // MN$.*

Hình vẽ



Gọi F, K lần lượt là trung điểm BD, EC.

Hướng dẫn chứng minh:

Ta có $\begin{cases} AD = AB(gt), AE = AC(gt) \\ \measuredangle DAC = \measuredangle BAE \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta DAC (c-g-c)$

$\Rightarrow \measuredangle ABE = \measuredangle ADC$

Từ đó suy ra $BE \perp CD$.

Dễ dàng chứng minh $FNKM$ là hình thoi $\Rightarrow FK \perp MN$

Ta có $\begin{cases} AF = IF = \dfrac{AB}{2} \\ AK = IK = \dfrac{EC}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow FK$ thuộc trung trực $AI \Rightarrow FK \perp AI$

Do đó $MN // AI$

Tính chất 10: *Cho tam giác ABC có H là trực tâm, d_1 là đường phân giác trong góc HAC. Đường phân giác trong góc HBC cắt cạnh AD, d_1, AC lần lượt tại M, N, I. CMR: $AI \perp MN$.*

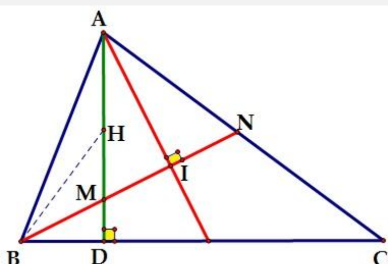
Hình vẽ

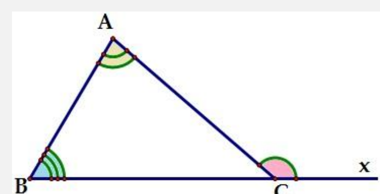
Điều phải chứng minh

$\Leftrightarrow \Delta AMN$ cân tại A

$\Rightarrow \measuredangle AMN = \measuredangle ANM$

Để chứng minh hai góc trên bằng nhau ta có thể sử dụng kỹ thuật tách góc.





Hướng dẫn chứng minh:

Gọi $D = AH \cap BC$ và $E = BH \cap AC$

Ta có $\measuredangle BDH = \measuredangle BEC = 90^o$

$\Rightarrow \measuredangle BHD = \measuredangle NCB$

Lại có $\begin{cases} \measuredangle AMN = \measuredangle BHM + \measuredangle HBM \\ \measuredangle HBM = \measuredangle NBC (BM \ phan \ giac) \\ \measuredangle NCB + \measuredangle NBC = \measuredangle ANM \end{cases}$

$\Rightarrow \measuredangle ANM = \measuredangle AMN \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A

Mà AI là đường phân giác MAN

$\Rightarrow AI \perp MN$

Lưu ý:

$\measuredangle ACx = 180^0 - \measuredangle ACB$
$= \measuredangle BAC + \measuredangle ABC$

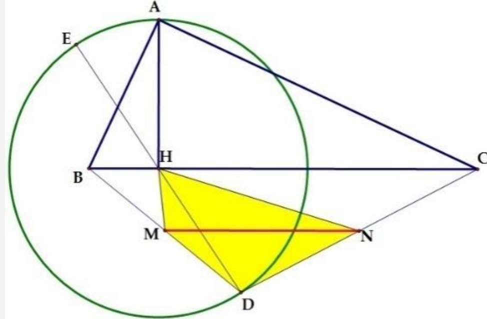
Tính chất 11: *Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, vẽ đường tròn tâm H bán kính HA. D là*

điểm trên đường (H). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DB, DC. CMR: $DMHN$ là tứ giác nội tiếp.

Hình vẽ

Cần chứng minh là $\measuredangle MND = \measuredangle MHD$

Kéo dài HD cắt (H) để tạo đường kính và đồng thời khai thác các giả thiết của các trung điểm.



Hướng dẫn chứng minh:

Gọi E là giao điểm của DH với đường tròn (H)

Ta có $BH.BC = AH^2 \left(= DH.HE\right)$ (do ΔABC vuông tại A)

$\Rightarrow BH.BC = DH.HE$

Lại có $\measuredangle BHE = \measuredangle DHC$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta HBE \sim \Delta HDC\left(c-g-c\right)$

$\Rightarrow \measuredangle BEH = \measuredangle DCH$

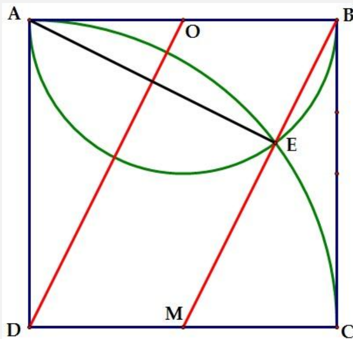
$\Rightarrow \measuredangle MHD = \measuredangle BED$ (do $MH // EB$)

Tương tự ta có $\measuredangle MND = \measuredangle DCH$

Do đó $\measuredangle MND = \measuredangle MHD \Rightarrow$ tứ giác $DMHN$ nội tiếp.

Tính chất 12: *Cho hình vuông $ABCD$, vẽ đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn tâm D bán kính DC. Gọi E là giao điểm của hai đường tròn trên $(E \neq A)$. Tia BE cắt CD tại M. CMR M là trung điểm CD.*

Hình vẽ



Cần chú ý đến tính chất hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm A, E thì $OD \perp AE$

Hướng dẫn chứng minh:

Ta có ΔEAB vuông tại E.

Do A, E là giao điểm của hai đường tròn $\Rightarrow AE \perp OD$

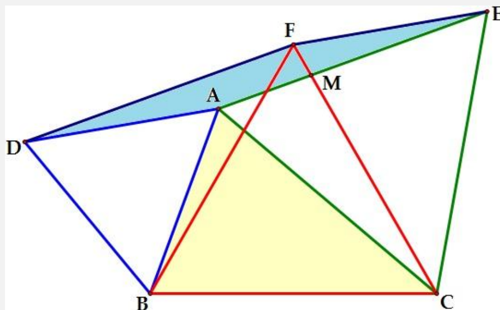
Mà $BM \perp AE \Rightarrow OD // BM$, lại có $OB // DM$ nên $OBMD$ là hình bình hành

$\Rightarrow DM = OB = \dfrac{CB}{2}$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của CD

Tính chất 13: *Cho tam giác ABC, về phía ngoài của tam giác ABC, vẽ các tam giác đều ABD, ACE. F là giao điểm của đường thẳng qua D song song với AE và đường thẳng qua E song song với AD. CMR ΔFBC là tam giác đều.*

Hình vẽ



ΔFBC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} FB = FC \, (1) \\ \measuredangle BFC = 60^0 \end{cases}$

Để chứng minh $FB = FC$, ta chứng minh $\Delta DFB = \Delta FCE$

Để chứng minh $\measuredangle BFC = 60^0$, ta khai

Hướng dẫn chứng minh:

Gọi $M = AE \cap CF$

Ta có $\begin{cases} DF // AE \\ AD // EF \end{cases} \Rightarrow AEFD$ là hình bình hành

$\Rightarrow \measuredangle ADF = \measuredangle AEF \Rightarrow \measuredangle FDB = \measuredangle FEC$

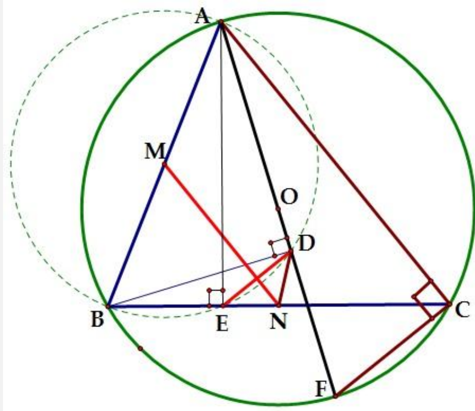
Lại có $DB = DA = EF, AC = AE = DF$

$\Rightarrow \Delta DBF = \Delta FEC \Rightarrow BF = CF$ và $\measuredangle BFD = \measuredangle FCE$

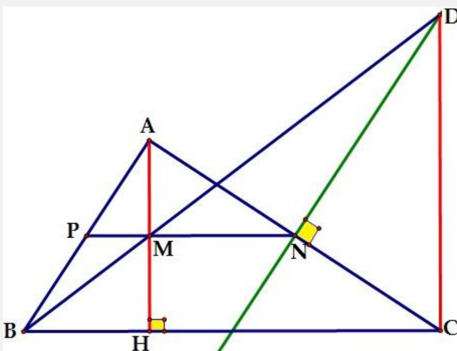
Mặt khác,

thác sự song song $AE//DF$, đồng thời phân tích góc $\measuredangle AMC, \measuredangle DFC$	$\begin{cases} \measuredangle AMC = \measuredangle DFC\left(AE//DF\right) \\ \measuredangle AMC = \underbrace{\measuredangle MEC}_{60^0} + \measuredangle FCE \\ \measuredangle DFC = \measuredangle BFC + BFD \end{cases}$ Suy ra $\measuredangle BFC = 60^0 \xrightarrow{BF=FC(cmt)} \Delta FBC$ đều.

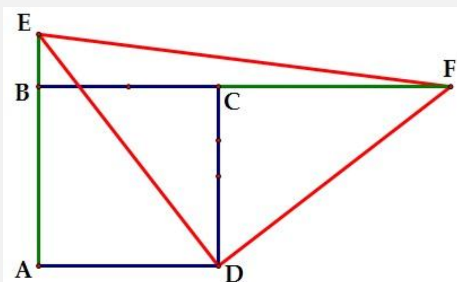
Tính chất 14: *Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O). M,N lần lượt là trung điểm của AB,BC, vẽ $BD \perp OA$ tại D, $AE \perp BC$ tại F. CMR: $MN \perp DE$.*

Hình vẽ 	***Hướng dẫn chứng minh:*** Dựng đường kính AF của đường tròn (O) Ta có $ADBE$ là tứ giác nội tiếp (do $\measuredangle ADB = \measuredangle AEB$) $\Rightarrow \measuredangle ABC = \measuredangle EDN$ mà $\measuredangle ABC = \measuredangle AFC$ (do $ACFB$ nội tiếp) $\Rightarrow \measuredangle EDN = \measuredangle AFC \Rightarrow DE//AF$ Mà $\begin{cases} AF \perp AC \\ MN//AC \end{cases} \Rightarrow DE \perp MN$

Tính chất 15: *Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Gọi M là trung điểm AH, D là giao điểm của BM và đường trung trực của AC. CMR: ΔDBC vuông.*

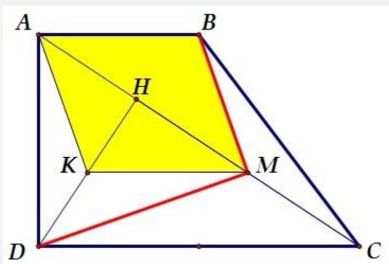
Hình vẽ  Gọi P,N lần lượt là trung điểm của AB, AC.	***Hướng dẫn chứng minh:*** Khi đó, từ tính chất đường trung bình $\Rightarrow M,N,P$ thẳng hàng và do đó $BH = 2PM$, $HC = 2MN$ Từ đó, áp dụng định lý Thales với $AB//DN$ (do cùng vuông góc AC) Suy ra $\frac{BH}{HC} = \frac{PM}{MN} = \frac{BM}{MD} \Rightarrow MH//CD$ Lại có $HM \perp BC \Rightarrow CD \perp BC$ $\Rightarrow \Delta DBC$ vuông tại C

Tính chất 16: *Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của BA, lấy một điểm E; trên tia đối của CB, lấy một điểm F sao cho $EA = FC$. CMR: ΔFED vuông cân.*

Hình vẽ 	***Hướng dẫn chứng minh:*** Xét $\begin{cases} AB = CD\left(gt\right) \\ CF = EA\left(gt\right) \\ \measuredangle EAD = \measuredangle FCD = 90^0 \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta EAD = \Delta CFD\left(c-g-c\right)$ $\Rightarrow \begin{cases} ED = DF \\ \measuredangle DEF = \measuredangle EFD \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta EDF$ *vuông cân.*

Tính chất 17: *Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. $(CD = 2AB)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên đường chéo AC, M là trung điểm HC. Chứng minh rằng $BM \perp MD$.*

Hình vẽ



Hướng dẫn chứng minh:

Gọi K là trung điểm DH suy ra KM là đường trung bình ΔHCD

Suy ra $KM = AB, KM // AB$

(do $AB // CD, DC = 2AB$)

Nên $ABMK$ là hình bình hành

$\Rightarrow BM // AK$.

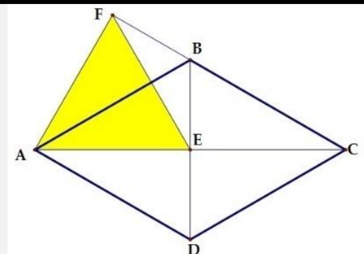
Lại có $KM \perp AD, DH \perp AM$ nên K là trực tâm ΔADM.

$\Rightarrow AK \perp DM$

$\Rightarrow DM \perp BM\,(do\ AK // BM)$

Tính chất 18: *Cho hình thoi $ABCD$ có $\measuredangle BAC = 60^o$ và E là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Chứng minh rằng AEF là tam giác đều.*

Hình vẽ



Hướng dẫn chứng minh:

Ta có $\measuredangle FBA = 180^0 - \measuredangle ABC = 60^0$

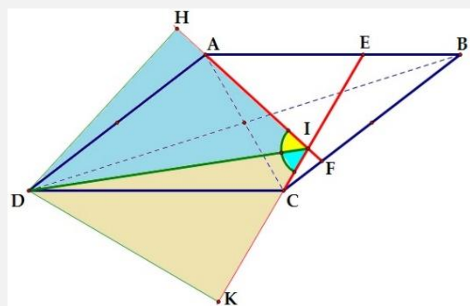
Và đồng thời $\measuredangle ABE = 60^0$

Suy ra AB là tia phân giác của góc $\measuredangle FBE$. Do $FA \perp BF, AE \perp BE$ nên theo tính chất phân giác ta có $AF = AE \Rightarrow \Delta AEF$ cân tại A. Lại có góc $\measuredangle FAE = \measuredangle BAE + \measuredangle FAB = 60^0$

$\Rightarrow \Delta AEF$ là tam giác đều.

Tính chất 19: *Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F là các điểm nằm trên cạnh AB và BC sao cho $FA = EC$. Gọi I là giao điểm của FA và EC. Chứng minh rằng ID là tia phân giác của góc $\measuredangle AIC$.*

Hình vẽ



Hướng dẫn chứng minh:

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên cạnh AF, CE.

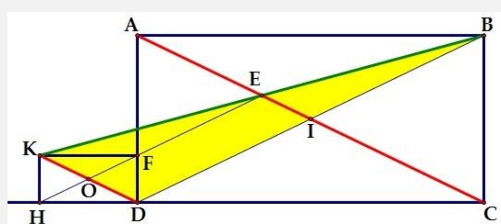
Dễ dàng chứng minh được

$S_{\Delta AFD} = S_{\Delta CED} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ $\quad S_{\Delta AFD} = \frac{1}{2} AF.DH, S_{\Delta AFD} = \frac{1}{2} CE.DK,$ $CE = AF\,(gt)$

Suy ra $DH = DK \Rightarrow DI$ là phân giác của góc $\measuredangle AIC$.

Tính chất 20: *Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm I, gọi E thuộc cạnh AC và kẻ đường thẳng qua E song song BD lần lượt cắt AD, CD tại F, H. Dựng hình chữ nhật $FDHK$. Chứng minh rằng $KD // AC$ và E là trung điểm BK.*

Hình vẽ



Hướng dẫn chứng minh:

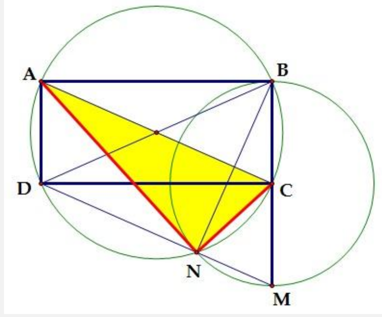
Gọi O là tâm hình chữ nhật $FDHK$ suy ra $\measuredangle OHD = \measuredangle ODH$

Mặt khác $\measuredangle OHD = \measuredangle IDC = \measuredangle ICD$

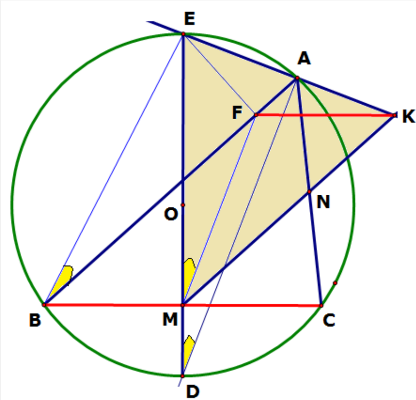
$\Rightarrow \measuredangle ODH = \measuredangle ICD \Rightarrow DK // AC$

Do đo $EI // DK$, I là trung điểm $BD \Rightarrow E$ là trung điểm BK (đpcm).

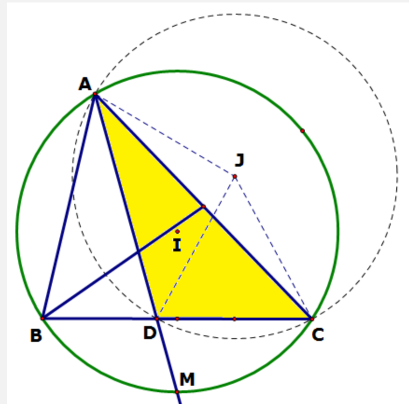
Tính chất 21: *Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C. N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Chứng minh rằng $AN \perp CN$.*

Hình vẽ	Hướng dẫn chứng minh:
	Ta có $BCND$ là tứ giác nội tiếp (do $\measuredangle BCD = \measuredangle BND = 90^0$) $\Rightarrow \measuredangle BNC = \measuredangle BDC = \measuredangle CAB$ $\Rightarrow ANCB$ là tứ giác nội tiếp (do $\measuredangle ANC = 180^0 - \measuredangle ABC = 90^0$ $\Rightarrow AN \perp NC$

Tính chất 22: *Cho tam giác $ABC\left(AB > AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Đường phân giác ngoài góc BAC cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm E. M,N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC. F là hình chiếu vuông góc của E trên AB, K là giao điểm MN và AE. Chứng minh rằng $KF//BC$.*

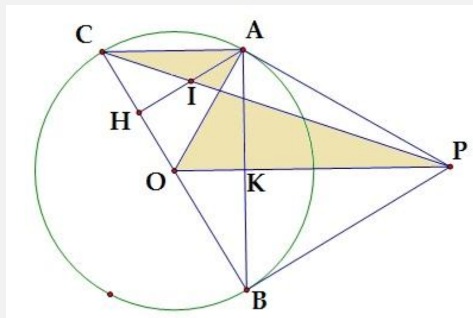
Hình vẽ	Hướng dẫn chứng minh:
 Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa điểm $A \Rightarrow AD \perp AE$ (1). Ta có ED là đường kính của $\left(O\right)$ $\Rightarrow ED \perp BC$ tại M.	$BEFM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \measuredangle FME = \measuredangle FBE = \measuredangle ABE = \measuredangle ADE$ $\Rightarrow MF//AD\left(2\right) \xrightarrow{(1)} MF \perp AE\left(3\right)$ $\left(1\right),\left(2\right) \Rightarrow MF \perp AE\ (3)$. Lại có $MN//AB,\ EF \perp AB \Rightarrow EF//MN\left(4\right)$ $\left(3\right),\left(4\right) \Rightarrow F$ là trực tâm $\Delta EKM \Rightarrow KF \perp EM$ mà $EM \perp BC \Rightarrow FK//BC$

Tính chất 23: *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $\left(I\right)$, điểm D là chân đường phân giác trong của góc BAC. Đường thẳng AD cắt $\left(I\right)$ tại điểm $M\left(\neq A\right)$. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACD. $CMR: CM \perp CJ$.*

Hình vẽ	Hướng dẫn chứng minh:
	$\begin{cases} \measuredangle AJD = 2\measuredangle ACD = \left(2\measuredangle BAD\right) \\ \measuredangle BAD = \measuredangle BCM \end{cases}$ $\Rightarrow \measuredangle CJD = 2\measuredangle BCM$ Lại có $\measuredangle CJD + 2\measuredangle JCD = 180^0$ $\Rightarrow 2\measuredangle BCM + 2\measuredangle JCD = 180^0$ $\Rightarrow \measuredangle BCM + \measuredangle JCD = 90^0 \Rightarrow CM \perp CJ$.

Tính chất 24: *Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA và PB tới đường tròn (O) (A,B là hai tiếp điểm). Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến đường kính BC của đường tròn. CMR: PC cắt AH tại I là trung điểm AH.*

Hình vẽ



Hướng dẫn chứng minh:

Gọi $D = BP \cap AC$ Ta có $PA = PB \Rightarrow \Delta PAB$ cân tại P và $\measuredangle BAC = 90^0$

$\Rightarrow PD = PB (= PA)$ (1)

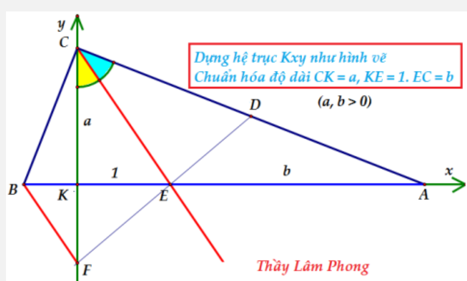
ΔBPC có $IH // PB \Rightarrow \frac{IH}{PB} = \frac{CI}{CP}$ (2)

ΔCPD có $AI // PD \Rightarrow \frac{IA}{PD} = \frac{CI}{CP}$ (3)

$\Rightarrow IH = IA \Rightarrow I$ là trung điểm AH.

Tính chất 25: *Cho tam giác ABC vuông tại C, kẻ đường cao CK, kẻ phân giác CE của góc ACK $K,E \in AB$. D là trung điểm AC, $F = DE \cap CK$. CMR: BF song song CE.*

Hình vẽ



Dựng hệ trục Kxy như hình vẽ.

Đặt $CK = a, KE = 1, EC = b$. Khi đó, ta có:

$K(0;0), E(1;0), C(0;a), D\left(\frac{b+1}{2};\frac{a}{2}\right)$.

$$\begin{cases} \frac{1}{CK^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BC = \frac{ab}{\sqrt{a^2-1}} \\ AK^2 + CK^2 = AC^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{b+1}{b-1}} \end{cases}$$

Hướng dẫn chứng minh:

Ta có AE là phân giác của ΔACK

$\Rightarrow \frac{CK}{CA} = \frac{KE}{EA} \Leftrightarrow \frac{a}{CA} = \frac{1}{b} \Rightarrow CA = ab$

$$ED: \begin{cases} qua\ E(1;0) \\ \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}(b-1;a)\ lam\ vtcp \end{cases}$$

$\Rightarrow ax - (b-1)y = a$

Và $F = Oy \cap ED \Rightarrow F\left(0;\frac{-a}{b-1}\right)$

$BK^2 + CK^2 = BC^2$

$\Rightarrow KB = \frac{-a}{\sqrt{b^2-1}} \Rightarrow B\left(\frac{-a}{\sqrt{b^2-1}};0\right)$

Do đó $\begin{cases} \overrightarrow{CE} = (1;-a) \\ \overrightarrow{BF} = \frac{a}{\sqrt{b^2-1}}(1;-a) \end{cases}$

$\Rightarrow CE // BF$ $(dpcm)$.

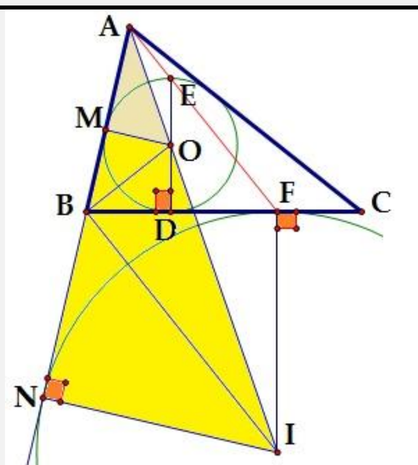
Tính chất 26: *Cho tam giác ABC. Một đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với BC tại D. Đường tròn tâm I là đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC và tiếp xúc với BC tại F. Vẽ đường kính DE của đường tròn (C). CMR: A,E,F thẳng hàng.*

Hình vẽ

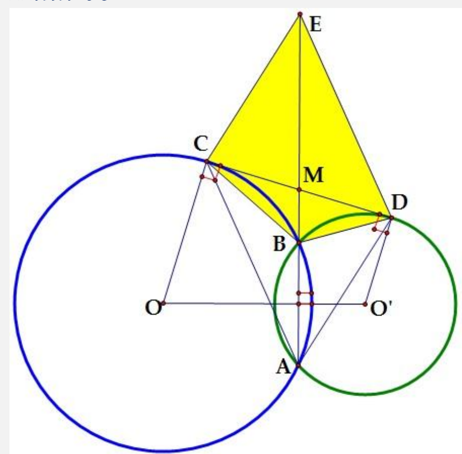
Hướng dẫn chứng minh:

Ta có A,O,I thẳng hàng (do cùng nằm trên đường phân giác trong góc BAC)

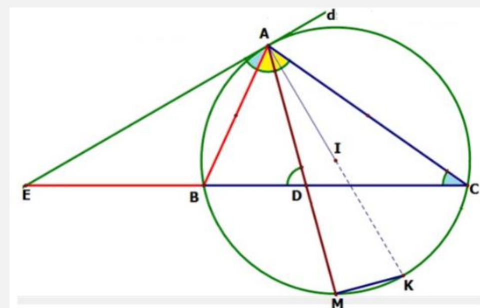
Gọi M,N là tiếp điểm của (O), (I) với AB

	ΔAIN có $OM//IN$ $\Rightarrow \frac{AO}{AI}=\frac{OM}{IN}\left(=\frac{OE}{IF}\right)(1)$ (Thales thuận) Lại có $\begin{cases} OD\perp BC \\ IF\perp BC \end{cases} \Rightarrow OD//IF$ $\Rightarrow \measuredangle AOE=\measuredangle IAF\,(2)$ $(1),(2)\Rightarrow \Delta OAE\sim\Delta IAF$ $\Rightarrow \measuredangle OAE=\measuredangle IAF$ $\Rightarrow A,E,F$ thẳng hàng.

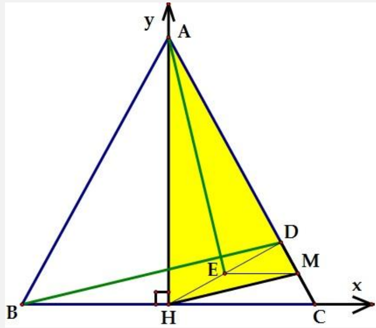
Tính chất 27: *Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A,B (O,O' trái phía so với AB). Vẽ tiếp tuyến chung $CD\,(C\in(O),D\in(O'))$, C,D nằm trên nửa mặt phẳng bờ OO' có chứa B). Đường thẳng qua C song song với AD và đường thẳng qua D song song AC cắt nhau tại E. CMR: tứ giác $BCED$ nội tiếp.*

Hình vẽ 	***Hướng dẫn chứng minh:*** Gọi $M=AB\cap CD$ Chứng minh $MC^2=MA.MB$, $MD^2=MA.MB$ Từ đó ta có M là trung điểm của AE. Suy ra E,M,B,A thẳng hàng. $\measuredangle BCD=\measuredangle BAC$ (cùng chắn cung BC) $\measuredangle BED=\measuredangle BAC$ $(ED//AC)$ $\Rightarrow \measuredangle BCD=\measuredangle BED$ $\Rightarrow$ tứ giác $BCED$ nội tiếp.

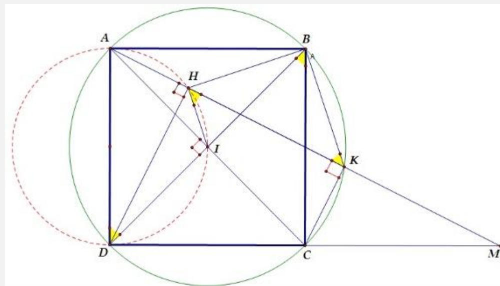
Tính chất 28: *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I có AD là đường phân giác trong góc A.(D là chân phân giác trong). Gọi d là tiếp tuyến tại A của đường tròn (C) cắt BC tại E. Chứng minh rằng tam giác AED cân tại E.*

Hình vẽ 	***Hướng dẫn chứng minh:*** Gọi d là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC $E=d\cap BC$ Giả sử $EB<EC$. Ta có $\angle EAB=\angle ACB$ và $\angle BAD=\angle DAC$, $\Rightarrow \angle EAD=\angle EAB+\angle BAD$ $=\angle ACB+\angle DAC=\angle ADE$ $\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại E.

Tính chất 29: *Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H trên AC, E là trung điểm của HD. CMR: $BD\perp AE$*

Hình vẽ	Hướng dẫn chứng minh:
 *dựng hệ trục Hxy như hình vẽ, và đặt* $BC = 2a\,(a>0)$ $\Rightarrow C(a;0), B(-a;0), A(0;2a)$ $AC: \frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1 \Leftrightarrow 2x+y=2a$ $\Rightarrow HD: x-2y=0$	$\Delta AHM: \begin{cases} EM \perp AH \\ HD \perp AM \\ HD \cap EM = E \end{cases}$ $\Rightarrow AE \perp HM \Rightarrow AE \perp BD$ **Cách 2:** $D = AC \cap HD \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=2a \\ x-2y=0 \end{cases}$ $\Rightarrow D\left(\frac{4a}{5};\frac{2a}{5}\right) \Rightarrow E\left(\frac{2a}{5};\frac{a}{5}\right)$. *Ta có:* $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{2a}{5};-\frac{9a}{5}\right), \overrightarrow{BD}=\left(\frac{9a}{5};\frac{2a}{5}\right)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}=0 \Leftrightarrow AE \perp BD$

Tính chất 30: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ tâm I. Gọi M là điểm đối xứng của D qua C. Gọi H, K lần lượt chân đường cao hạ từ D, C lên AM. CMR: $HI // BK$*

Hình vẽ	Hướng dẫn chứng minh:
* Ta có: $ABCD$ là tứ giác nội tiếp (do $ABCD$ là hình vuông) và ABKC là tứ giác nội tiếp (do $\measuredangle ABC = \measuredangle AKC = 90^0$) $\Rightarrow$ A, B, K, C, D cùng thuộc đường tròn đường kính AC 	$\Rightarrow ABKD$ là tứ giác nội tiếp. $\Rightarrow \measuredangle AKB = \measuredangle ADB = 45^0\ (1)$ * Mặt khác, $\measuredangle ADB = \measuredangle KHI = 45^0\ (2)$ (góc ngoài bằng góc đối trong, do $AHID$ là tứ giác nội tiếp có $\measuredangle AHD = \measuredangle AID = 90^0$). Từ $(1);(2)$, suy ra $\measuredangle AKB = \measuredangle KHI = 45^0 \Rightarrow HI // BK$ (**so le trong**).

B- TUYỂN CHỌN – PHÂN DẠNG HÌNH PHẲNG OXY NĂM 2016

Phần I. Các bài toán về tam giác.

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các đường thẳng chứa đường cao kẻ từ A, trung tuyến kẻ từ B và phân giác trong kẻ từ C lần lượt là (d1): 3x – 4y + 27=0, (d2): 4x + 5y – 3 = 0, (d3): x + 2y – 5 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC. **Lần 1– Trường THPT chuyên Bắc Giang – Bắc Giang**

Lời giải tham khảo

➢ Véc-tơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{a_{d_1}}=(4;3)$.

Vì $d_1\perp BC$ nên BC nhận $\overrightarrow{a_{d_1}}=(4;3)$ làm vtpt.

+) Ta có: vtpt của d_3 là $\overrightarrow{n_{d_3}}=(1;2)$

+) Gọi véc-tơ pháp tuyến của AC là: $\overrightarrow{n_{AC}}=(a;b);\left(a^2+b^2\neq 0\right)$

+) Do d_3 là phân giác của góc C nên ta có: $\left|\cos\left(\overrightarrow{n_{AC}},\overrightarrow{n_{d_3}}\right)\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{a_{d_1}},\overrightarrow{n_{d_3}}\right)\right|\Leftrightarrow\frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}}=\frac{|4.1+3.2|}{\sqrt{25}.\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow|a+2b|=2\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow 3a^2-4ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\3a=4b\end{array}\right.$$

➢ TH1: Khi $a=0$ chọn $b=1$ thì $\overrightarrow{n_{AC}}=(0;1)$

+) Gọi $C(5-2c;c)\in d_3$. Khi đó AC qua C có dạng: $AC: y-c=0$

+) Do $A=AC\cap d_1\Rightarrow\begin{cases}y-c=0\\3x-4y+27=0\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{4}{3}c-9;c\right)$

+) M là trung điểm AC nên có: $M\left(-\frac{1}{3}c-2;c\right)$. Mà $M\in d_2\Rightarrow 4\left(-\frac{1}{3}c-2\right)+5c-3=0\Leftrightarrow c=3$.

Vậy $A(-5;3);C(-1;3)$

+) Phương trình BC qua C và vuông góc với d_1 có dạng: $BC: 4x+3y-5=0$

Khi đó: $B=d_2\cap BC\Rightarrow B(2;-1)$

Thử lại thấy A và B nằm cùng phía với d_3 hay d_3 là phân giác ngoài góc C nên không thỏa mãn.

➢ TH2: Khi $3a=4b$, chọn $b=3\Rightarrow a=4\Rightarrow\overrightarrow{n_{AC}}=(4;3)$ khi đó AC song song với BC nên loại trường hợp này.

➢ Vậy không có tam giác ABC thỏa bài toán đã cho.

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho tam giác ABC có góc A tù. Hãy viết phương trình các cạnh tam giác ABC biết chân 3 đường cao hạ từ đỉnh A,B,C lần lượt có tọa độ là: D(–1;–2), E(2;2), F(–1;2).

Đề thi thử THPT Quốc Gia năm 2016

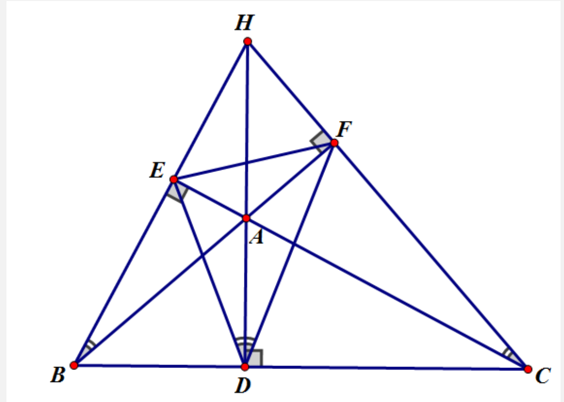
Lời giải tham khảo

➢ Trước hết ta chứng minh rằng khi ΔABC tù ở A thì A là tâm vòng tròn nội tiếp ΔDEF. Thật vậy:

+) Do 2 tứ giác nội tiếp BDAE và DCFA nội tiếp nên:

$$\begin{cases} ADE = ABE = 90^0 - BHF \\ ADF = ACF = 90^0 - FHB \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $ADE = ADF$ .Hay DH là tia phân giác góc FDE. Tương tự như vậy ta cũng có EA là phân giác của góc DEF. Suy ra A là tâm vòng tròn nội tiếp ΔDEF.



➢ Phân giác trong và ngoài tại D là : $d_1: 3x - y + 1 = 0;\ d_2: x + 3y + 7 = 0$

+) Phân giác trong và ngoài tại E: $e_1: x - 2y + 2 = 0;\quad e_2: 2x + y - 6 = 0$

+) Phân giác trong và ngoài tại F: $f_1: x + y - 1 = 0;\quad f_2: x - y + 3 = 0$

Vì ΔABC có góc A tù thì 3 cạnh BC, CA, AB của nó có phương trình là: d_2, e_1, f_1.

➢ Vậy : $BC: x + 3y + 7 = 0;\quad CA: x - 2y + 2 = 0;\quad AB: x + y - 1 = 0$

Bài 3: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(3; 1), đường thẳng BC có phương trình y = 0, đường phân giác trong của góc BAC có phương trình y = x − 2, điểm M(−6; −2) thuộc đường thẳng AB. Tính diện tích tam giác ABC.

Lần 2 - Cao Đẳng nghề Nha Trang

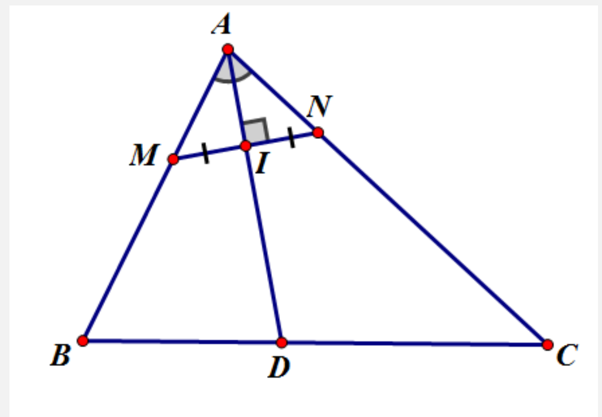
Lời giải tham khảo

Cách 1: (Kĩ thuật đối xứng qua phân giác)

➢ Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với phân giác AD, sao cho Δ cắt AD tại I, cắt AC tại N, rõ ràng ΔAMN cân tại A cho ta I là trung điểm MN.

+) $\Delta: x + y + 8 = 0$

+) $I = AD \cap \Delta \Rightarrow I(-3;-5) \Rightarrow N(0;-8)$



➢ Phương trình đường thẳng AB qua hai điểm A, M có dạng: $AB: x - 3y = 0$

+) $B = BC \cap AB \Rightarrow B(0;0)$

➢ Phương trình đường thẳng AC qua hai điểm A, N có dạng: $AC: 3x - y - 8 = 0$

+) $C = AC \cap BC \Rightarrow C\left(\frac{8}{3};0\right)$

➢ Khi đó, dễ dàng tính được: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} -3 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{matrix}\right| = \frac{4}{3}$

Cách 1: (Đáp án)

➢ Phương trình đường thẳng AB: $x - 3y = 0$

➢ Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng AB và phân giác trong (d) thì $\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{20}}$

(với $\vec{n_1}=(1;-3)$ là VTPT của AB và $\vec{n_2}=(1;-1)$ là VTPT của (d))

➢ Giả sử $\vec{n}=(A;B)\neq\vec{0}$ là tọa độ VTPT của đường thẳng (d′) chứa cạnh AC khi đó:

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{n_2}\right)\right|\Leftrightarrow\frac{|A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

$\Leftrightarrow 3A^2+10AB+3B^2=0$ ($B\neq0$ vì nếu $B=0$ thì $A=0$ mâu thuẫn giả thiết $\vec{n}\neq\vec{0}$)

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=-3B\\ A=-\frac{1}{3}B\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\vec{n}=(-3B;B)\\ \vec{n}=\left(-\frac{1}{3}B;B\right)\end{array}\right.$. Ứng với 2 phương trình: $\left[\begin{array}{l}3x-y-8=0\\ x-3y=0\quad(\equiv AB)\end{array}\right.$

+) Nên đường thẳng (d′) chứa cạnh AC là : $3x-y-8=0$.

Tọa độ điểm B và C lần lượt tìm được là : $B(0;0)$ và $C\left(0;\frac{8}{3}\right)$ suy ra $BC=\frac{8}{3}$

Chiều cao của tam giác ABC ứng với cạnh BC là $d[A,BC]=1$.

➢ Suy ra diện tích là $S=\frac{4}{3}$

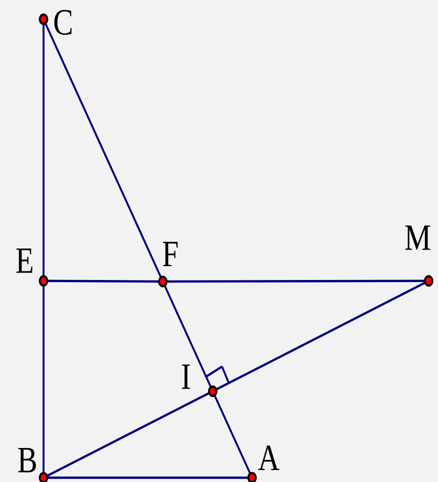
Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* vuông tại *B*, $BC=2BA$. Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của *BC, AC*. Trên tia đối của tia *FE* lấy điểm *M* sao cho $FM=3FE$. Biết điểm *M* có tọa độ $(5;-1)$, đường thẳng *AC* có phương trình $2x+y-3=0$, điểm *A* có hoành độ là số nguyên. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

Lần 1 –Trường THPT Phước Bình

Lời giải tham khảo

Tính chất hình học: $BM\perp AC$

(Vẽ hình chính xác thì ta sẽ thấy $\Delta ABC=\Delta BEM$ từ đó gợi ý ta chứng minh theo hướng chứng minh 2 tam giác bằng nhau).



➢ Gọi I là giao điểm của BM và AC.

Ta thấy $BC=2BA\Rightarrow EB=BA, FM=3FE\Rightarrow EM=BC$

$\Delta ABC=\Delta BEM\Rightarrow \widehat{EBM}=\widehat{CAB}\Rightarrow BM\perp AC$.

+) Đường thẳng BM đi qua M vuông góc với AC

$BM: x-2y-7=0$.

+) Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x+y-3=0\\ x-2y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{13}{5}\\ y=\frac{-11}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{13}{5};\frac{-11}{5}\right)\Rightarrow\overrightarrow{IM}=\left(\frac{12}{5};\frac{6}{5}\right)$$

+) Ta có thêm: $\Delta EMB\sim\Delta IMF$ (g-g) nên: $\overrightarrow{IB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IM}=\left(\frac{-8}{5};\frac{-4}{5}\right)\Rightarrow B(1;-3)$

➢ Trong ΔABC ta có $\frac{1}{BI^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{5}{4BA^2}\Rightarrow BA=\frac{\sqrt{5}}{2}BI$

+) Mặt khác $BI=\sqrt{\left(\frac{-8}{5}\right)^2+\left(\frac{-4}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$, suy ra $BA=\frac{\sqrt{5}}{2}BI=2$

+) Gọi toạ độ $A(a,3-2a)\in AC$, Ta

có : $BA^2=4\Leftrightarrow(a-1)^2+(6-2a)^2=4\Leftrightarrow 5a^2-26a+33=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\ a=\frac{11}{5}\end{array}\right.$

+) Do a là số nguyên suy ra $A(3;-3)$. $\overrightarrow{AI}=\left(\frac{-2}{5};\frac{4}{5}\right)$

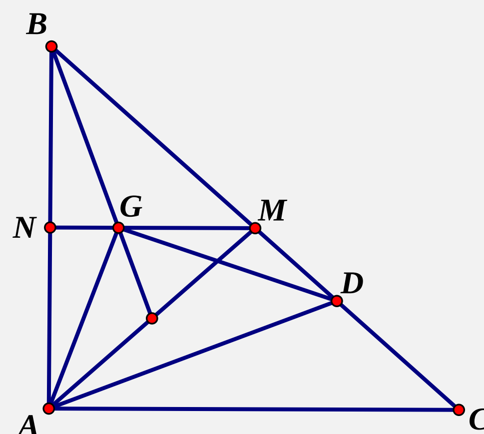
+) Ta có $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AI}=(-2;4)\Rightarrow C(1;1)$.

➢ Vậy $A(3;-3),B(1;-3),C(1;1)$

Bài 5 Cho ΔABC vuông cân tại *A*. Gọi *M* là trung điểm *BC*, *G* là trọng tâm ΔABM, điểm $D(7;-2)$ là điểm nằm trên đoạn *MC* sao cho $GA=GD$. Tìm tọa độ điểm *A*, lập phương trình *AB*, biết hoành độ của *A* nhỏ hơn 4 và *AG* có phương trình $3x-y-13=0$.

Lần 4 –Trường THPT Phước Bình

Lời giải tham khảo:



✍ **Tính chất hình học: ΔGAD vuông cân tại G.**

➢ Ta có: $d(D;AG)=\frac{|3.7-(-2)-13|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

+) ΔABM vuông cân $\Rightarrow GA=GB\Rightarrow GA=GB=GD$.

Vậy *G* là tâm đường tròn ngoại tiếp *ABD*

$\Rightarrow AGD=2ABD=90^0\Rightarrow\Delta GAD$ vuông cân tại *G*.

+) Do đó $GA=GD=d(D;AG)=\sqrt{10}\Rightarrow AD^2=20$;

Gọi $A(a;3a-13)\in AG; a<4$. Ta có:

$AD^2=20\Leftrightarrow(a-7)^2+(3a-11)^2=20\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5(loai)\\ a=3\end{array}\right.$

Vậy $A(3;-4)$

➢ Gọi VTPT của *AB* là $\vec{n}_{AB}(a;b)$

$\cos NAG=\left|\cos\left(\vec{n}_{AB},\vec{n}_{AG}\right)\right|=\frac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}}$ (1)

+) Mặt khác $\cos NAG=\frac{NA}{AG}=\frac{NM}{\sqrt{NA^2+NG^2}}=\frac{3NG}{\sqrt{9.NG^2+NG^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow 6ab+8b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ 3a=-4b\end{array}\right.$

Với $b=0$ chọn $a=1$ ta có $AB:x-3=0$;

Với $3a=-4b$ chọn $a=4;b=-3$ ta có $AB:4x-3y-24=0$

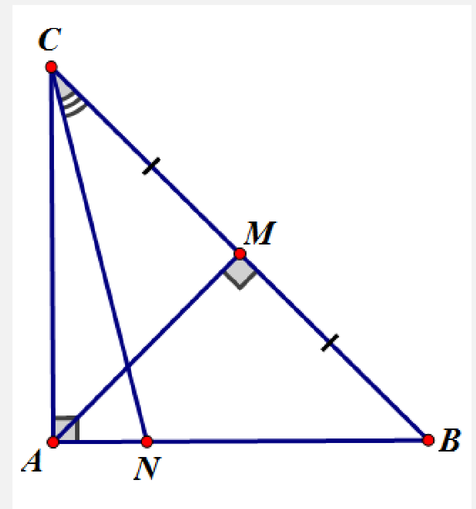
+) Nhận thấy với $AB: 4x-3y-24=0$ thì $d(D;AB)=\frac{|4.7-3.(-2)-24|}{\sqrt{16+9}}=2<d(D;AG)=\sqrt{10}$ (loại)

➤ Vậy $AB: x-3=0.$

Bài 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A, gọi M là trung điểm của BC, N thuộc cạnh AB sao cho $AB=4AN$. Biết rằng $M(2;2)$, phương trình đường thẳng $CN: 4x+y-4=0$ và điểm C nằm phía trên trục hoành. Tìm tọa độ điểm A.

Lần 1 –Trường THPT chuyên Hùng Vương

Lời giải tham khảo



➤ Ta có: $\cos ACN=\frac{AC}{CN}=\frac{AB}{\sqrt{AC^2+AN^2}}=\frac{4AN}{\sqrt{17}AN}=\frac{4}{\sqrt{17}}$

+) Khi đó, ta có được:

$ACB=45^0 \Rightarrow \cos NCB=\cos\left(45^0-ACN\right)$

$=\cos 45^0.\cos ACN+\sin 45^0.\sin ACN=\frac{5}{\sqrt{34}}$

+) Giả sử $\overrightarrow{n_{BC}}=(a,b)\ \left(a^2+b^2\neq 0\right)$, do

$\cos NCB=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_{BC}},\overrightarrow{n_{CN}}\right)\right|=\frac{|4a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{17}}$

$\Leftrightarrow \frac{|4a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{17}}=\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\Leftrightarrow 7a^2+16ab-23b^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ a=-\frac{23}{7}b\end{array}\right.$

➤ Khi $b=a$ thì phương trình $BC: x+y-4=0$

+) Do $C=BC\cap CN$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}4x+y=4\\ x+y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases}$

+) Nên $C(0;4)\Rightarrow B(4;0)$

+) Phương trình $AM: x-y=0\Rightarrow A(a;a)$

+) Ta có: $AB\perp AC\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=4\end{array}\right.$, Khi đó được $A(0;0)$ hoặc $A(4;4)$, nhưng do A và B nằm khác phía với CN nên thử lại ta có: $A(0;0)$

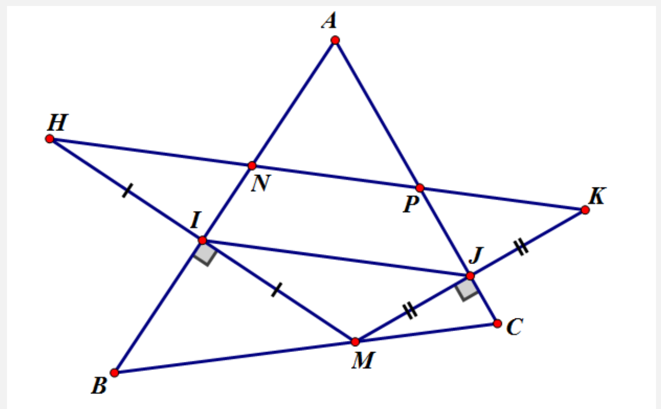
➤ Khi $a=-\frac{23}{7}b$, thì phương trình $BC: 23x-7y-32=0$

+) Do $C = BC \cap CN$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x + y = 4 \\ x + y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20}{17} \\ y = \dfrac{-12}{17} \end{cases}$ (Loại do C nằm phía trên trục hoành).

Bài 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $A(-1;4), B(3;0), C\left(-\dfrac{7}{3};0\right)$ và điểm $M(1;0)$ trên cạnh BC. Hãy xác định tọa độ điểm N trên AB và điểm P trên AC sao cho chu vi tam giác MNP nhỏ nhất

Lần 2 –Trường THPT Đồng Xoài

Lời giải tham khảo:



➢ Gọi K là điểm đối xứng của M qua AC, H là điểm đối xứng của M qua AB.

➢ Chu vi tam giác MNP

$CV_{\Delta MNP} = MN + NP + PM = KN + NP + PH \geq HK$

$(HK = const)$

+) Dấu bằng xảy ra khi H, N, P, K thẳng hàng.

+) Vậy chu vi tam giác MNP nhỏ nhất bằng HK.

Khi H, N, P, K thẳng hàng.

➢ Tìm N, P.

+) Phương trình đường thẳng $AB: 3x - y + 7 = 0$

+) Phương trình đường thẳng $AC: x + y - 3 = 0$

+) Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên AB $\Rightarrow I(-2;1)$ do đó K(-5; 2).

+) Gọi J là hình chiếu vuông góc của M trên AC $\Rightarrow$J(2;1) do đó H(3; 2).

+) Phương trình đường thẳng $HK: y - 2 = 0$. Ta có: N = HK ∩ AC, P = HK ∩AB.

➢ Do đó tọa độ các điểm N, P cần tìm là: N(1; 2), P($-\dfrac{5}{3}$;2).

Bài 8: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân, cạnh đáy BC có phương trình: $x + y + 1 = 0$, phương trình đường cao kẻ từ B là: $x - 2y - 2 = 0$. Điểm M(2;1) thuộc đường cao kẻ từ C. Viết phương trình các cạnh bên của tam giác ABC.

Lần 1 –Trường THPT Nguyễn Hữu Cảnh – Bình Phước

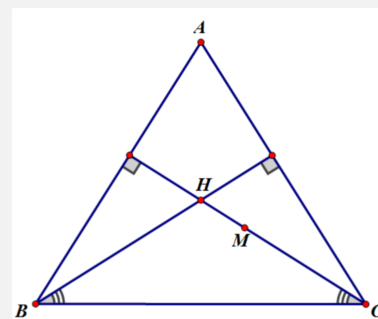
Lời giải tham khảo:

➢ Gọi H là trực tâm Δ ABC. Tìm được B(0;-1), $\cos HBC = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \cos HCB$

+) Pt đường thẳng HC qua M có dạng: a(x-2)+b(y-1)=0

($\vec{n} = (a;b)$ là VTPT và $a^2 + b^2 > 0$)

+) $\cos HCB = \dfrac{|a+b|}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow 4a^2+10ab+4b^2=0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+5\left(\dfrac{a}{b}\right)+2=0$



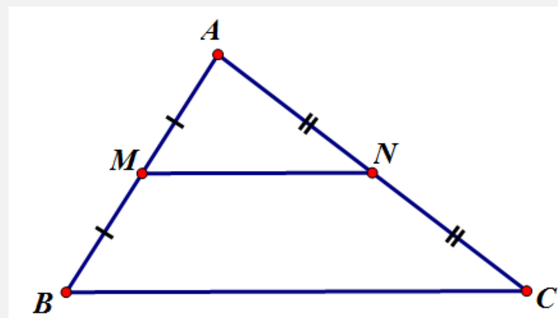
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{b}=-2 \\ \dfrac{a}{b}=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2, b=1 \\ a=-1, b=2(l) \end{array}\right.$. Nên phương trình $CH: -2x+y+3=0$ ➢Do $\begin{cases} AB \perp CH \\ B \in AB \end{cases}$ nên viết được phương trình đường thẳng $AB: x+2y+2=0$

➢ C là giao điểm của AB và BC $\Rightarrow C\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$ và phương trình đường thẳng $AC: 6x+3y+1=0$

Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng $\Delta: 2x+y-1=0$ và điểm $A(-1; 2)$. Gọi *M* là giao điểm của Δ với trục hoành. Tìm hai điểm *B, C* sao cho *M* là trung điểm *AB* và trung điểm *N* của đoạn *AC* nằm trên đường thẳng Δ, đồng thời diện tích tam giác *ABC* bằng 4.

Lần 3 –Trường THPT Nguyễn Hữu Cảnh- Bình Phước

Lời giải tham khảo:



➢ Tọa độ *M*: $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$

+) *M* là trung điểm *AB* nên $\Rightarrow B(2; -2)$

➢ Phương trình đường thẳng BC qua B và song song với $MN \equiv \Delta$ có dạng: $BC: 2x+y-2=0$

+) Tham số hóa điểm $C(c; -2c+2)$

+) Theo giả thiết, ta có:

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} d(A; BC).BC$

$\Leftrightarrow 4 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{5}}.\sqrt{(c-2)^2+(2c-4)^2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-2 \\ c=6 \end{array}\right.$

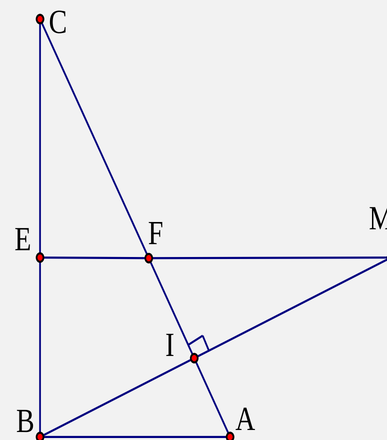
➢ Kết luận: $B(2; -2)$, $C(6; -10)$ hoặc $C(-2; 6)$

Bài 10: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* vuông tại *B*, $BC = 2BA$. Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của *BC, AC*. Trên tia đối của tia *FE* lấy điểm *M* sao cho $FM = 3FE$. Biết điểm $M(5; -1)$, đường thẳng *AC* có phương trình $2x+y-3=0$, điểm *A*

có hoành độ là số nguyên. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

Đề thi thử THPT Quốc Gia năm 2016 –đề 1

Lời giải tham khảo:



Tính chất hình học: $AC \perp BM$

+) Gọi I là giao điểm của BM và AC.

+) Ta thấy $BC = 2BA \Rightarrow EB = BA, FM = 3FE \Rightarrow EM = BC$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta BEM \Rightarrow EMB = ACB \Rightarrow BM \perp AC$.

➢ Đường thẳng BM đi qua M vuông góc với AC

$BM: x - 2y - 7 = 0$.

+) Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{5} \\ y = \dfrac{-11}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{13}{5}; \dfrac{-11}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\dfrac{12}{5}; \dfrac{6}{5}\right)$,

$\overrightarrow{IB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{IM} = \left(\dfrac{-8}{5}; \dfrac{-4}{5}\right) \Rightarrow B(1;-3)$

➢ Trong ΔABC ta có $\dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{5}{4BA^2} \Rightarrow BA = \dfrac{\sqrt{5}}{2}BI$

+) Mặt khác $BI = \sqrt{\left(\dfrac{-8}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{-4}{5}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, suy ra $BA = \dfrac{\sqrt{5}}{2}BI = 2$

Gọi toạ độ $A(a, 3-2a)$, Ta có $BA^2 = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (6-2a)^2 = 4 \Leftrightarrow 5a^2 - 26a + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = \dfrac{11}{5} \end{array}\right.$

+) Do a là số nguyên suy ra $A(3;-3)$. $\overrightarrow{AI} = \left(\dfrac{-2}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$

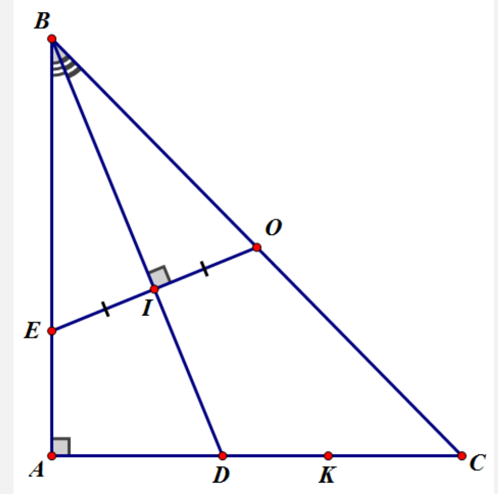
+) Ta có $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI} = (-2;4) \Rightarrow C(1;1)$.

➢ Vậy $A(3;-3), B(1;-3), C(1;1)$

Bài 11: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông tại A . B,C là hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ .Đường phân giác trong góc B của tam giác có phương trình: $x + 2y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết đường thẳng AC đi qua $K(6;2)$

Lần 2–Trường THPT Lộc Ninh

Lời giải tham khảo:



➢ Tham số hóa điểm $B(-2b+5;b)\in BD \Rightarrow C(2b-5;-b)$

+) Phương trình đường thẳng qua O và vuông góc với BD: có dạng: $\Delta: 2x-y=0$

+) Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow I(1;2)$$

+) Δ cắt AB tại E, I là trung điểm OE nên $E(2;4)$

+) $\overrightarrow{EB}=(-2b+3;b-4)$; $\overrightarrow{KC}=(2b-11;-b-2)$

+) Mà $BE\perp KC \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=5 \end{array}\right.$

➢ TH1: Khi $b=1$ suy ra: $B(3;1);C(-3;-1)$

Phương trình: $AB: 3x+y-10=0$; $AC: x-3y=0$

+) Nên $A=AB\cap AC \Rightarrow A(3;1)$ (loại do trùng với B)

➢ TH2: Khi $b=5$ suy ra: $B(-5;5);C(5;-5)$

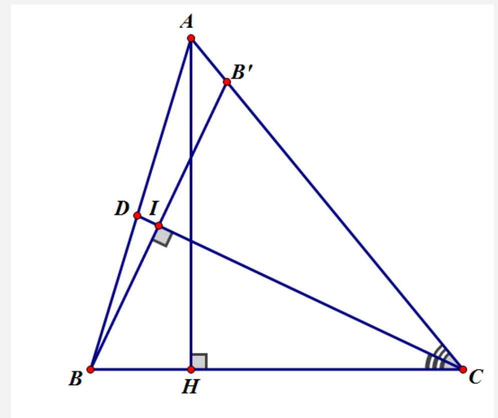
Phương trình: $AB: x+7y-30=0$; $AC: 7x-y-40=0$

+) Nên $A=AB\cap AC \Rightarrow A\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$

Bài 12: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC biết đỉnh $B(2;-1)$, đường cao qua A có phương trình $d_1: 3x-4y+27=0$, phân giác trong góc C có phương trình $d_2: x+2y-5=0$. Tìm toạ độ điểm A.

Lần 2 –Trường THPT Vạn Ninh – Khánh Hoà

Lời giải tham khảo:



➢ Đường thẳng BC qua $B(2;-1)$, có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(4;3)$.

Suy ra phương trình đường thẳng BC là: $4x+3y-5=0$.

+) Toạ độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow C(-1;3)$$

➢ Gọi B′ là điểm đối xứng của B qua d_2, I là giao điểm của BB′ và d_2.

Suy ra phương trình BB′: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x-y-5=0$

+) Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow I(3;1)$

+) Nên $B'(4;3)$, viết được phương trình đường thẳng $AC: y-3=0$

+) Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y-3=0 \\ 3x-4y+27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(-5;3)$

Bài 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;1)$ là trung điểm cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao đi qua đỉnh A lần lượt có phương trình (d): $x+y-5=0$ và (d'): $3x+y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

Trường Trung cấp nghề Ninh Hoà

Lời giải tham khảo:

➢ Do A là giao điểm của (d) và (d') nên $A(-2;7)$

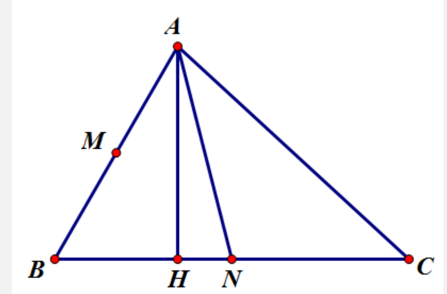
+) Do M là trung điểm của AB nên $B(6;-5)$

+) Phương trình đường thẳng BC qua B và vuông góc với AH có dạng: $BC: x-3y-21=0$

+) $N = BC \cap d \Rightarrow N(9;-4)$

+) Do N là trung điểm của BC nên $C(12;-3)$

➢ Phương trình đường thẳng AC: $5x+7y-39=0$



Bài 14: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB: 2x+y-1=0$, $AC: 3x+4y+6=0$, điểm $M(1;3)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh BC sao cho $3MB=2MC$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Trường THPT Khánh Sơn – Khánh Hoà

Lời giải tham khảo:

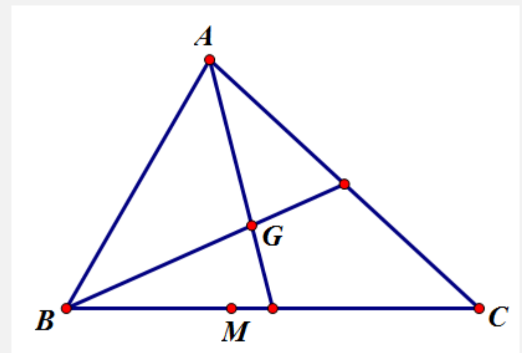
➢ $A = AB \cap AC \Rightarrow A(2;-3)$

+) Tham số hóa: $B(b;-2b+1) \in AB$, $C(4c-2;-3c) \in AC$

+) Do B,C,M thẳng hàng, nên

$$\left[\begin{array}{l} 3\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC} \\ 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC} \end{array}\right.$$

➢ Tìm được $G\left(1;-\frac{5}{3}\right) \vee G\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3}\right)$

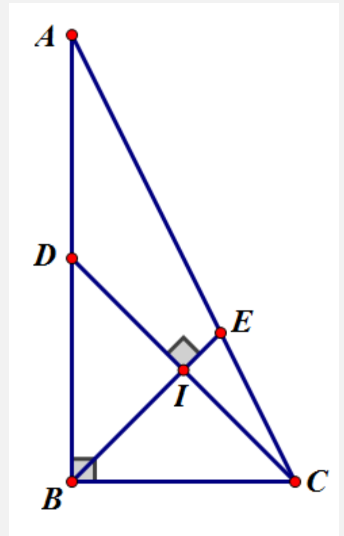


Bài 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B, $AB=2BC$. Gọi D là trung điểm của AB, E nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AC=3EC$. Biết phương trình đường thẳng chứa CD là $x-3y+1=0$ và điểm $E\left(\frac{16}{3};1\right)$. Tìm tọa độ các điểm A,B,C.

Trường THPT Đức Thọ - Hà Tĩnh

Lời giải tham khảo:

✍ **Tính chất hình học:** $BE \perp CD$



+) Gọi $I = BE \cap CD$. Ta có $\frac{BA}{BC} = \frac{EA}{EC}$ nên E là chân phân giác trong góc B của tam giác ABC. Do đó $\widehat{CBE} = 45^0 \Rightarrow BE \perp CD$

➤ Phương trình đường thẳng $BE: 3x + y - 17 = 0$.

+) Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x + y - 17 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow I(5;2)$

+) Ta có $BI = CI = \frac{BC}{\sqrt{2}}, CE = \frac{1}{3}AC = \frac{BC\sqrt{5}}{3} \Rightarrow IE = \frac{BC}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IE}$

Từ đó tìm được tọa độ điểm $B(4;5)$

➤ Gọi $C(3c-1;\ c) \in CD$, ta có:

$$BC = \sqrt{2}BI = 2\sqrt{5} \Rightarrow (3c-5)^2 + (c-5)^2 = 20 \Leftrightarrow 10c^2 - 40c + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} c = 1 \\ c = 3 \end{matrix}\right.$$

+) Với $c = 1$ ta có $C(2;1)$, $A(12;1)$

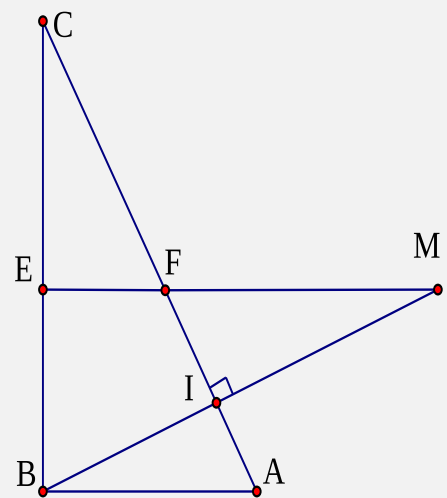
+) Với $a = 3$ ta có $C(8;3)$, $A\ (0;-3)$

Bài 16: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* vuông tại *B*, $BC = 2BA$. Gọi *E*, *F* lần lượt là trung điểm của *BC*, *AC*. Trên tia đối của tia *FE* lấy điểm *M* sao cho $FM = 3FE$. Biết điểm $M(5;-1)$, đường thẳng *AC* có phương trình $2x + y - 3 = 0$, điểm *A* có hoành độ là số nguyên. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

Lần 1 –Trường THPT Lam Kinh

Lời giải tham khảo:

Tính chất hình học: $BM \perp AC$



+) Gọi I là giao điểm của BM và AC.

+) Ta thấy $BC = 2BA \Rightarrow EB = BA, FM = 3FE \Rightarrow EM = BC$

$\Delta ABC = \Delta BEM \Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{CAB} \Rightarrow BM \perp AC$.

➤ Đường thẳng BM đi qua M vuông góc với AC

$$BM: x - 2y - 7 = 0.$$

+) Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = \frac{-11}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{13}{5}; \frac{-11}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}\right)$,

$\overrightarrow{IB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IM} = \left(\frac{-8}{5}; \frac{-4}{5}\right) \Rightarrow B(1;-3)$

+) Trong ΔABC ta có $\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{5}{4BA^2} \Rightarrow BA = \frac{\sqrt{5}}{2}BI$

Mặt khác $BI = \sqrt{\left(\frac{-8}{5}\right)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, suy ra $BA = \frac{\sqrt{5}}{2}BI = 2$

+) Gọi toạ độ $A(a,3-2a)$, Ta có $BA^2=4 \Leftrightarrow (a-1)^2+(6-2a)^2=4 \Leftrightarrow 5a^2-26a+33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=\frac{11}{5} \end{array}\right.$

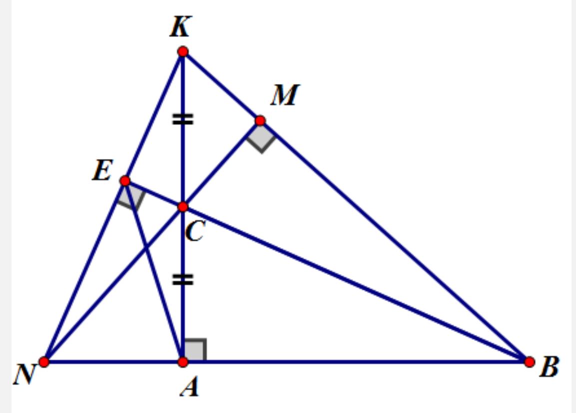
Do a là số nguyên suy ra $A(3;-3)$. $\overrightarrow{AI}=\left(\frac{-2}{5};\frac{4}{5}\right)$

➢ Ta có $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AI}=(-2;4) \Rightarrow C(1;1)$. Vậy $A(3;-3), B(1;-3), C(1;1)$

Bài 17: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Gọi *K* là điểm đối xứng của *A* qua *C*. Đường thẳng đi qua *K* vuông góc với *BC* cắt *BC* tại *E* và cắt *AB* tại $N(-1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC* biết rằng góc $AEB=45^0$, phương trình đường thẳng *BK* là $3x+y-15=0$ và điểm *B* có hoành độ lớn hơn 3.

Lần 2 –Trường THPT Lê Lợi – Thanh Hoá

Lời giải tham khảo:



➢ Tứ giác ABKE nội tiếp $\Rightarrow AKB=AEB=45^0$

$\Rightarrow \Delta AKB$ vuông cân tại A $\Rightarrow ABK=45^0$

+) Đường thẳng BK có vtpt $\vec{n_1}=(3;1)$, gọi $\vec{n_2}=(a;b)$ là vtpt của đt AB và φ là góc giữa BK và AB.

+) Ta có :

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|3a+b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |3a+b|=\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+6ab-4b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2a \\ a=-2b \end{array}\right.$$

+ Với $a=-2b$, chọn $\vec{n_2}=(-2;1) \Rightarrow AB:-2x+y-5=0 \Rightarrow B(2;9)$ (Loại)

+ Với $b=2a$, chọn $\vec{n_2}=(1;2) \Rightarrow AB:x+2y-5=0 \Rightarrow B(5;0)$ (TM)

➢ Tam giác BKN có BE và KA là đường cao $\Rightarrow$ C là trực tâm của BKN $\Rightarrow CN \perp BK \Rightarrow CN: x-3y+10=0$. ΔABK và ΔKCM vuông cân

$$\Rightarrow KM=\frac{1}{\sqrt{2}}CK=\frac{1}{2\sqrt{2}}AC=\frac{1}{2\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}BK=\frac{BK}{4} \Rightarrow \overrightarrow{BK}=4\overrightarrow{KM}$$

$$M=MN\cap BK \Rightarrow M\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right) \Rightarrow K(3;6),$$

➢ Đường thẳng AC qua K vuông góc AB $\Rightarrow AC: 2x-y=0$

$A=AC\cap AB \Rightarrow A(1;2)$, C là trung điểm của AK $\Rightarrow C(2;4)$.

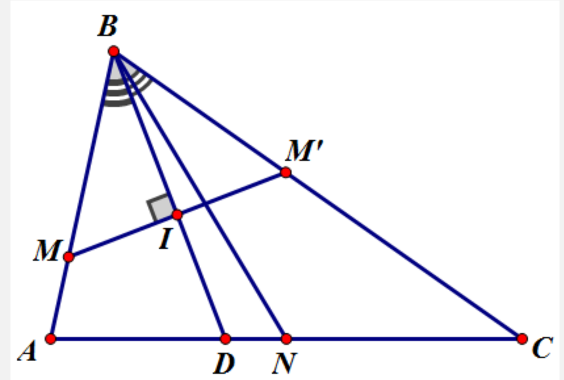
➢ Vậy: A(1;2), B(5;0), C(2;4).

Bài 18: Cho tam giác ABC. Đường phân giác trong của góc B có phương trình $d_1: x+y-2=0$, đường trung tuyến kẻ từ B có phương trình $d_2: 4x+5y-9=0$. Đường

thẳng chứa cạnh AB đi qua điểm $M(2;\frac{1}{2})$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R=\frac{5}{2}$. Tìm tọa độ đỉnh A .

Lần 1–Lê Lợi Thanh Hoá

Lời giải tham khảo:



➢ Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 4x+5y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

+) Gọi M' là điểm đối xứng với M qua d_1, $M'(\frac{3}{2};0)$.

+) Do AB đi qua B và M nên có pt: $AB: x+2y-3=0$.

BC đi qua M' và B nên có pt: $BC: 2x+y-3=0$.

+) Gọi α là góc giữa 2 đường thẳng AB và BC suy ra $\cos\alpha = \frac{|2.1+1.2|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$.

➢ Từ định lý sin trong tam giác ABC, ta có: $2R = \frac{AC}{\sin ABC} \Rightarrow AC = 3$.

+) $A \in AB, C \in BC \Rightarrow A(a;\frac{3-a}{2}); C(c;3-2c)$, trung điểm của AC là $N(\frac{a+c}{2};\frac{9-a-4c}{4})$.

+) $\begin{cases} N \in d_2 \\ AC = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-4c+3=0 \\ (c-a)^2 + \left(\frac{a-4c+3}{2}\right)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5; c=2 \\ a=-3, c=0 \end{array}\right.$

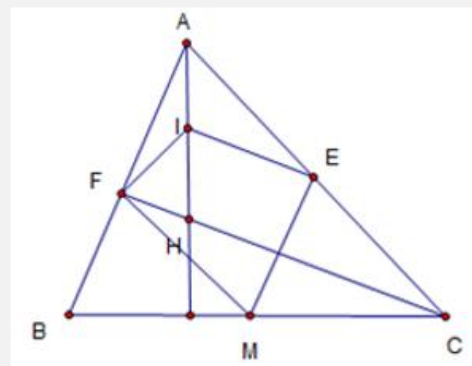
Khi $a=5$ ta được $A(5;-1)$. Khi $a=-3$ ta được $A(-3;3)$.

➢ Kết luận: $A(5;-1)$, $A(-3;3)$.

Bài 19: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có M(8;2); E$\left(\frac{11}{2};\frac{9}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm của BC và AC. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và F là chân đường cao hạ từ C, biết đường thẳng đi qua F và trung điểm của AH có phương trình là $d: 2x+y-8=0$. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC

Đề số 4–Moon

Lời giải tham khảo:



✍ **Tính chất hình học:** $FI \perp FM$ và $FI \perp FM$

+) $\begin{cases} IE \parallel CH \\ ME \parallel AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow ME \perp IE$

+) Ta có: tam giác AFH vuông tại F, có I là trung điểm AH nên từ đó cho ta $FI = IA = IH \Rightarrow FAI = AFI$

Tương tự cũng do tam giác FBC vuông tại F, có M là trung điểm BC nên $MB = MC = MF \Rightarrow BFM = FBM$

Mà $\widehat{FAI}+\widehat{FBM}=90^0 \Rightarrow \widehat{AFI}+\widehat{BFM}=90^0 \Leftrightarrow FI \perp FM$

➢ Phương trình đường thẳng:

$ME: x+y-10=0 \Rightarrow EI: x-y-1=0$

+) $I = EI \cap FI \Rightarrow I(3;2)$

+) Do $FI \perp FM$ nên phương trình đường thẳng $MF: x-2y-4=0$

+) $F = MF \cap FI \Rightarrow F(4;0) \Rightarrow CF: x-y-4=0;\ AB: x+y-4=0$

➢ Gọi $B(b;4-b) \in AB; C(c;c-4) \in CF$, do M là trung điểm BC nên:

$$\begin{cases} b+c=16 \\ -b+c=8 \end{cases} \Rightarrow B(6;-2); C(10;6)$$

+) AC nhận E làm trung điểm $A(1;3)$

➢ Vậy $A(1;3); B(6;-2); C(10;6)$

Bài 20: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, các điểm $M(2;-1)$, N lần lượt là trung điểm của HB và HC; điểm $K\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trực tâm tam giác AMN. Tìm tọa độ điểm C, biết rằng điểm A có tung độ âm và thuộc đường thẳng $d: x+2y+4=0$.

Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu

Lời giải tham khảo:

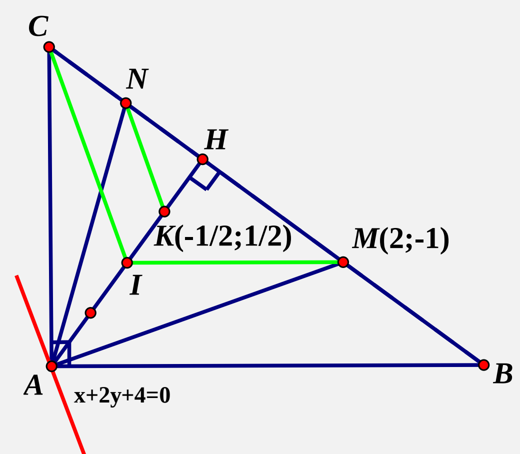
Tính chất hình học: $CI \perp AM$, K là trung điểm IH.

+) Gọi I là trung điểm của AH, ta có $MI // AB \Rightarrow MI \perp AC$

Suy ra: I là trực tâm tam giác $AMC \Rightarrow CI \perp AM$

+)Mà $NK \perp AM \Rightarrow NK // CI \Rightarrow K$ là trung điểm HI

➢ Đặt $A(-2a-4;a) \in d$, từ hệ thức $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KH} \Rightarrow H\left(\frac{2a+2}{3};\frac{2-a}{3}\right)$



+) Suy ra: $\overrightarrow{AK}=\left(\frac{7}{2}+2a;\frac{1}{2}-a\right)$ và $\overrightarrow{MH}=\left(\frac{2a-4}{3};\frac{5-a}{3}\right)$

+) Khi đó:

$$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MH}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}+2a\right)\left(\frac{2a-4}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{5-a}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 10a^2-13a-23=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\frac{23}{10} \end{array}\right. \Rightarrow A(-2;-1).$$

➢ Suy ra tọa độ $H(0;1)$ và $B(4;-3)$

+) Phương trình $AB:\ x+3y+5=0$ và $BC: x+y-1=0$

+) Phương trình $AC: 3x-y+5=0$

Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

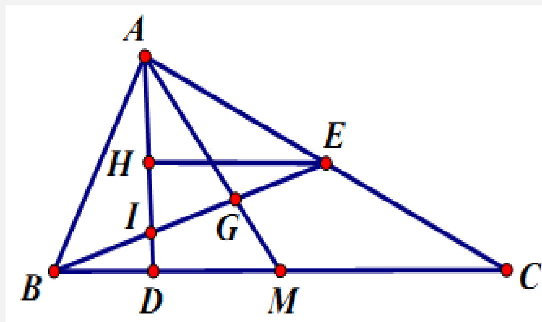
$$\begin{cases}3x-y=-5\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}\Rightarrow C(-1;2)$$

➢ Kết luận: $A(-2;-1)$; $B(4;-3)$; $C(-1;2)$

Bài 21: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $AC=2AB$, điểm $M\left(1;\frac{9}{2}\right)$ là trung điểm của BC, D là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BAD=CAM$. Gọi E là trung điểm của AC, đường thẳng DE có phương trình: $2x+11y-44=0$, điểm B thuộc đường thẳng d có phương trình: $x+y-6=0$. Tìm tọa độ 3 điểm A, B, C biết hoành độ điểm A là một số nguyên.

Trường THPT Chuyên Biên Hòa, lần 1

Lời giải tham khảo:



Goi $I=BE\cap AD$, $G=AM\cap BE$

$\Delta ABI=\Delta AEG$ $(g.c.g)\Rightarrow BI=GE$.

Mà $BG=2GE$ (do G là trọng tâm của ΔABC) $\Rightarrow BI=IG=GE$.

Kẻ $EH \parallel BC$ $(H\in AD)$.

Chứng minh được $CD=2HE, HE=2BD\Rightarrow CB=5BD$.

$2\overrightarrow{BM}=5\overrightarrow{BD}, B(b;6-b), D(22-11d;2d), M\left(1;\frac{9}{2}\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}55d+3b=108\\10d+3b=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=\dfrac{9}{5}\\b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D\left(\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)\\B(3;3)\end{cases}$$

$M\left(1;\frac{9}{2}\right)$ là trung điểm của BC $\Rightarrow C(-1;6)$.

Gọi $E(22-11e;2e)$, E là trung điểm của AC $\Rightarrow A(45-22e;4e-6)$

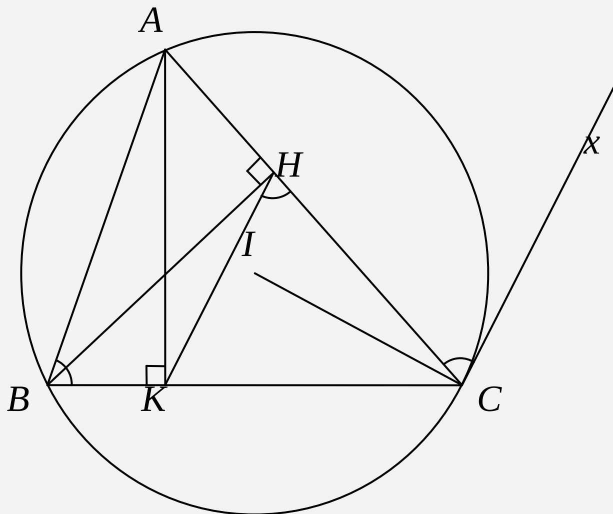
$$AC=2AB\Leftrightarrow 75e^2-278e+256=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e=2\ (tm)\\e=\dfrac{128}{75}\ (l)\end{array}\right.\Rightarrow A(1;2)$$

Vậy $A(1;2), B(3;3), C(-1;6)$

Bài 22: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=25$ ngoại tiếp tam giác ABC. Các điểm *K*(-1 ; 1), *H*(2; 5) lần lượt là chân đường cao kẻ từ các đỉnh *A* và *B* của tam giác *ABC*. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC* biết rằng *C* có hoành độ dương.

Trường THPT Tô Văn Ơn, lần 1

Lời giải tham khảo:



+(C) có tâm $I(1;2)$. Gọi Cx là tiếp tuyến của (C) tại C.

Ta có $HCx = ABC = \frac{1}{2}$Sđ AC (1)

Do $AHB = AKB = 90^0$ nên $AHKB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ $ABC = KHC$ (cùng bù với góc AHK) (2)

Từ (1) và (2) ta có $HCx = KHC \Rightarrow HK \,//\, Cx$.

Mà $IC \perp Cx \Rightarrow IC \perp HK$.

Do đó IC có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{KH} = (3;4)$, IC có phương trình $3x+4y-11=0$

Do C là giao của IC và (C) nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x+4y-11=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$$. Do $x_C > 0$ nên $C(5;-1)$

Đường thẳng AC đi qua C và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CH} = (-3;6)$ nên AC có phương trình $2x+y-9=0$.

Do A là giao của AC và (C) nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x+y-9=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}; \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$$ (loại). Do đó $A(1;7)$

Đường thẳng BC đi qua C và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CK} = (-6;2)$ nên BC có phương trình $x+3y-2=0$.

Do B là giao của BC và (T) nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+3y-2=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$$ (loại). Do đó $B(-4;2)$

Vậy $A(1;7)$; $B(-4;2)$; $C(5;-1)$.

Bài tập tương tự 1: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC, gọi D là điểm đối xứng với C qua A. Điểm $H(2;-5)$ là hình chiếu vuông góc của điểm B trên AD, điểm $K(-1;-1)$ là hình chiếu vuông góc của điểm D trên AB, đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ABD có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết điểm A có hoành độ dương.

lần 1–Trường THPT Hồng Quang- Hải Dương

Tính chất hình học: $IA \perp HK$ (Các em học sinh gắng chứng minh: kẻ tiếp tuyến Ax rồi chứng minh $HK \parallel Ax$)

Khi đó phương trình đường thẳng $IA: 3x-4y-11=0 \Rightarrow A = IA \cap (T) \Rightarrow A(5;1)$

Lập phương trình đường thẳng AB, AD rồi giao với (T) giải hệ tìm B, D rồi suy ra C.

Đáp số: $A(5;1); B(-4;-2); C(9;9)$

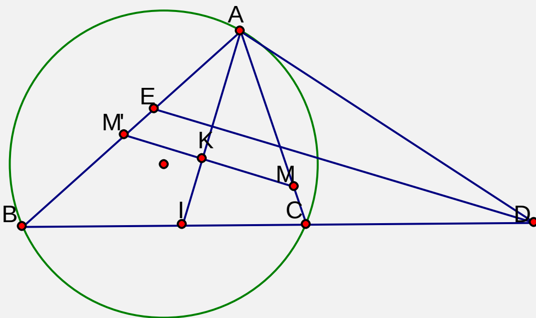
Bài tập tương tự 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (C): $x^2+y^2=25$, đường thẳng AC đi qua điểm K(2; 1). Gọi M, N lần lượt là chân đường cao kẻ từ đỉnh B và C. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC biết phương trình đường thẳng MN là $4x-3y+10=0$ và điểm A có hoành độ âm.

lần 1–Sở GDDT Quảng Ninh, Đáp Số : $A(-4;3); B(-3;-4), C(5;0)$

Bài 23: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của ADB có phương trình $x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

Trường THPT Chuyên Bình Long, Bình Phước, lần 2

Lời giải tham khảo:



Gọi AI là phan giác trong của BAC

Ta có : $AID = ABC + BAI$

$IAD = CAD + CAI$

Mà $BAI = CAI$, $ABC = CAD$ nên $AID = IAD$

$\Rightarrow \Delta DAI$ cân tại D $\Rightarrow DE \perp AI$

PT đường thẳng AI là : $x+y-5=0$

Gọi M′ là điểm đối xứng của M qua AI ⇒ PT đường thẳng MM′ : $x-y+5=0$

Gọi $K = AI \cap MM'$ ⇒ K(0;5) ⇒ M′(4;9)

VTCP của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AM'} = (3;5)$ ⇒ VTPT của đường thẳng AB là $\vec{n} = (5;-3)$

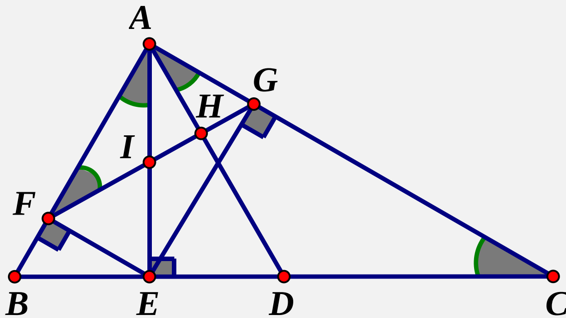
Vậy PT đường thẳng AB là: $5(x-1)-3(y-4)=0 \Leftrightarrow 5x-3y+7=0$

Bài 24: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là trung điểm của BC và E là hình chiếu của A trên đường thẳng BC. Gọi F và G tương ứng là hình chiếu của E trên các cạnh AB và AC. Đường thẳng FG cắt đường thẳng AD

tại H. Biết rằng $AH.AD = 2$, tọa độ điểm $A(2;3)$, phương trình đường thẳng $(FG): 3x - 4y + 2 = 0$ và điểm E có hoành độ nhỏ hơn 3. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

Trường THPT Hoàng Hoa Thám

Lời giải tham khảo:



Chứng minh *AD* vuông góc *FG*:

ABC là tam giác vuông có cạnh huyền *BC*, trung tuyến *AD* do đó: $DA = DB = DC$ hay tam giác *ACD* cân tại *D*.

Khi đó: $DAC = DCA$. Mặt khác vì $FAE = DCA$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) và $FAE = GFA$ (*AFEG* là hình chữ nhật) do đó: $DAC = GFA$.

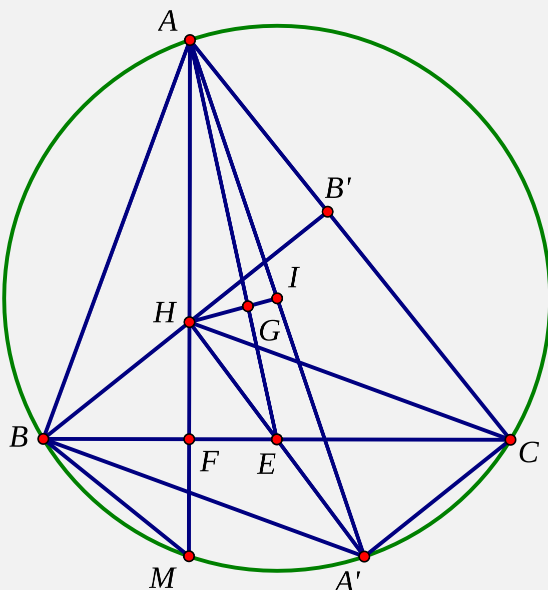
Vì: $GFA + AGH = 90^0$, vậy: $DAC + AGH = 90^0 \Rightarrow AD \perp FG$.

Phương trình đường thẳng: $(AD): 4x + 3y - 17 = 0$.

Bài 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 26$. Trọng tâm của tam giác là $G\left(1;\frac{8}{3}\right)$; điểm $M(7;2)$ nằm trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC (M ≠ A). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết –

Trường THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên

Lời giải tham khảo



▪ Gọi I là tâm của đường tròn (C), E là trung điểm của BC và H là trực tâm của tam giác ABC.

Kẻ đường kính AA′ ta có BA′ // CH, CA′ // BH nên BHCA′ là hbh.

Suy ra E là trung điểm của A′H nên IE là đường trung bình của Δ AHA′.

$\Rightarrow \frac{IE}{AH} = \frac{1}{2} = \frac{EG}{AG}$ nên ba điểm H, G, I thẳng hàng. Và $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$ mà

ta có $I(2;3)$ nên $H(-1;2)$.

Ta có M nằm trên (C) và A, H, M thẳng hàng;

tam giác MHB cân tại B. Nên

BC là đường trung trực của HM.

▪ Phương trình đường thẳng BC: $x-3=0$.

Tọa độ B, C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2; y=8 \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng HM: $y-2=0$.

Tọa độ A là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} y-2=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

▪ Vậy $A(-3;2)$, $B(3;8)$, $C(3;-2)$.

Bài 26: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* vuông tại B, $AB=2BC$, *D* là trung điểm của AB, E thuộc đoạn AC sao cho $AC=3EC$, biết phương trình đường thẳng CD: $x-3y+1=0$, $E\left(\frac{16}{3};1\right)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

Lần 1–Trường THPT Tam Đảo Vĩnh Phúc

Lời giải tham khảo

Gọi $I=BC\cap CD$, ta có: $\frac{BA}{BA}=\frac{EA}{EC}=\frac{1}{2}$ nên E là chân phân giác trong của góc ABC.

Tam giác BCD vuông cân tại B nên viết được ptdt $BE: 3x+y-17=0$.

$I=BE\cap CD \Rightarrow I(5;2)$

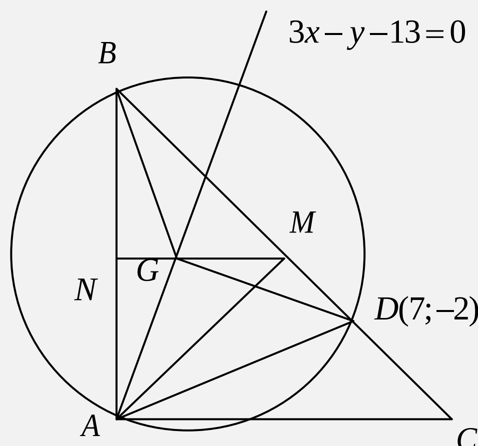
Dùng phương pháp gán độ dài chứng minh được: $\overrightarrow{IB}=-3\overrightarrow{IE} \Rightarrow B(4;5)$

Tham số hóa điểm $C\in CD$, giải pt: $BC=BI\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(2;1), A(12;1) \\ C(8;3), A(0;-3) \end{array}\right.$

Bài 27: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABM, điểm $D(7;-2)$ là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA=GD$. Tìm tọa độ điểm A, lập phương trình AB, biết hoành độ của điểm A nhỏ hơn 4 và AG có phương trình $3x-y-13=0$.

Lần 2–Trường THPT Thuận Châu, Sơn La.

Lời giải tham khảo:



Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng AG

$$d(D,AG)=\frac{|3.7+2-13|}{\sqrt{9+1}}=\sqrt{10}$$

Xác định hình chiếu của D trên AG.

Ta có tam giác ABC vuông cân đỉnh A nên tam giác ABM vuông cân đỉnh M

Suy ra $GB=GA$ Theo giả thiết $GA=GD$ nên tam giác ABD nội tiếp đường tâm G bán kính GA.

Ta có: $\widehat{AGD}=2\widehat{ABD}=90^0$ suy ra $DG\perp AG$ suy ra $GD=\sqrt{10}$

Suy ra tam giác AGD vuông cân đỉnh G suy ra $AD=2\sqrt{10}$

Tìm điểm A nằm trên đường thẳng AG sao cho $AD = 2\sqrt{10}$

Giả sử $A(t; 3t - 13)$

$AD = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow (t-7)^2 + (3t-11)^2 = 20$

$\Leftrightarrow t^2 - 14t + 49 + 9t^2 - 66t + 121 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 10t^2 - 80t + 150 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = 3 \end{array}\right.$

Với $t = 3$ suy ra $A(3; -4)$
Tìm số đo góc tạo bởi AB và AG.

$$cos\widehat{NAG} = \frac{NA}{AG} = \frac{NM}{AG} = \frac{3NG}{AG} = \frac{3NG}{\sqrt{AN^2 + NG^2}} = \frac{3NG}{\sqrt{9NG^2 + NG^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Gải sử đường thẳng AB có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ ta có :

$$\frac{|3a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 9a^2 + b^2 - 6ab = 9a^2 + 9b^2 \Leftrightarrow 8b^2 + 6ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 4b = -3a \end{array}\right.$$

TH 1 : $b = 0$ chọn $a = 1$ sy ra $\vec{n} = (1; 0)$ suy ra $AB: x - 3 = 0$

$$d(D, AB) = \frac{|7 - 3|}{\sqrt{1}} = 4 > \sqrt{10} = d(D, AG)$$

TH 2: $4b = -3a$ chọn $\vec{n} = (4; -3)$ suy ra $AB: 4(x-3) - 3(y+4) = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 3y - 24 = 0$

$$d(D, AB) = \frac{|4.7 + 3.2 - 24|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2 < \sqrt{10}$$

Trong hai trường hợp trên xét thấy $d(D, AB) > d(A, AG)$ nên $AB: x - 3 = 0$

Vậy: $A(3; -4), AB: x - 3 = 0$

Bài 28: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (T) có phương trình: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC, biết đường thẳng MN có phương trình: $20x - 10y - 9 = 0$ và điểm H có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

lần 2–Trường THPT Minh Châu- Hưng Yên

Lời giải tham khảo:

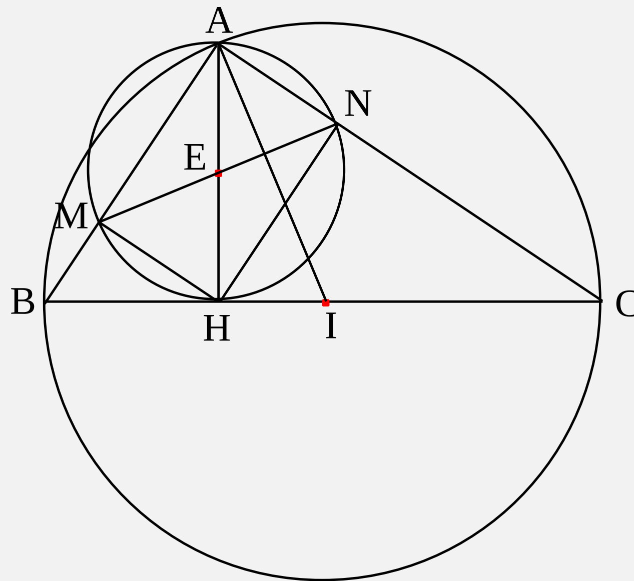
(T) có tâm $I(3;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Do $IA = IC \Rightarrow IAC = ICA$ (1)
Đường tròn đường kính AH cắt BC tại M

$\Rightarrow MH \perp AB \Rightarrow MH//AC$(cùng vuông góc AB) $\Rightarrow MHB = ICA$ (2)
Từ (1), (2), (3) ta có:

$IAC + ANM = ICA + AHM = MHB + AHM = 90^o$

Ta có: $ANM = AHM$ (chắn cung AM) (3)
Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC.



Suy ra: AI vuông góc MN

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng IA là: $x+2y-5=0$

Giả sử $A(5-2a;a)\in IA$.

Mà $A\in(T)\Leftrightarrow(5-2a)^2+a^2-6(5-2a)-2a+5=0\Leftrightarrow 5a^2-10a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=2\end{array}\right.$

Với $a=2\Rightarrow A(1;2)$ (thỏa mãn vì A, I khác phía MN)

Với $a=0\Rightarrow A(5;0)$ (loại vì A, I cùng phía MN)

Gọi E là tâm đường tròn đường kính AH $\Rightarrow E\in MN\Rightarrow E\left(t;2t-\frac{9}{10}\right)$

Do E là trung điểm AH $\Rightarrow H\left(2t-1;4t-\frac{38}{10}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\left(2t-2;4t-\frac{58}{10}\right),\ \overrightarrow{IH}=\left(2t-4;4t-\frac{48}{10}\right)$

Vì $AH\perp HI\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{IH}=\vec{0}\Leftrightarrow 20t^2-\frac{272}{5}t+\frac{896}{25}=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=\frac{8}{5} & \Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)\ \text{(thỏa mãn)}\\ t=\frac{28}{25} & \Rightarrow H\left(\frac{31}{25};\frac{17}{25}\right)\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

Với $t=\frac{8}{5}\Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)$ (thỏa mãn)

Ta có: $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{6}{5};\frac{3}{5}\right)\Rightarrow BC$ nhận $\vec{n}=(2;1)$ là VTPT

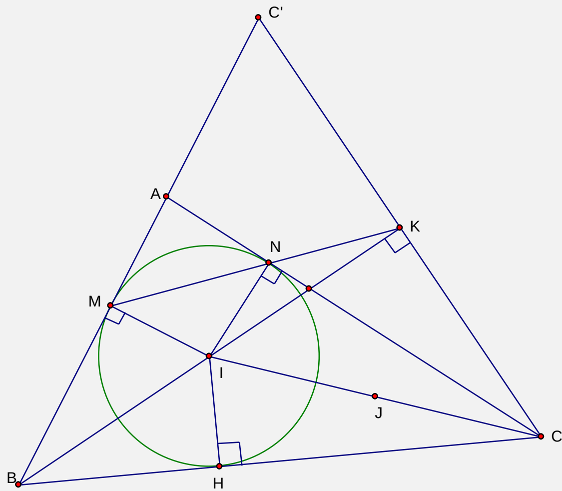
$\Rightarrow$ phương trình BC là: $2x+y-7=0$

Bài 29: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có C(-1;-2) ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi M, N, H lần lượt các tiếp điểm của (I) với cạnh AB, AC, BC. Gọi K(-1;-4) là giao điểm của BI với MN. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC, biết

H(2;1).

lần 2–Trường THPT Anh Sơn 2, Nghệ An

Lời giải tham khảo:



Ta có $\widehat{KIC}=\widehat{IBC}+\widehat{ICB}=\frac{\widehat{ABC}}{2}+\frac{\widehat{ACB}}{2}=90^0-\frac{\widehat{BAC}}{2}$ (1)

Ta có $\widehat{KNC}=\widehat{ANM}=\widehat{AMN}=90^0-\frac{\widehat{BAC}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KIC}=\widehat{KNC}$ nên tứ giác KNIC nội tiếp trong đường tròn đường kính IC.

Mặt khác tam giác IHC nội tiếp trong đường tròn đường kính IC

Vậy 5 điểm K, N, I, H, C nằm trên đường tròn đường kính IC.

Gọi J là trung điểm của IC nên J là tâm đường tròn đi qua 5 điểm trên.

Giả sử J(x;y) khi đó

$$JC=JK=JH\Rightarrow\begin{cases}JC=JK\\JC=JH\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-1-x)^2+(-4-y)^2=(-1-x)^2+(-2-y)^2\\(-1-x)^2+(-4-y)^2=(2-x)^2+(1-y)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-3\end{cases}$$

$\Rightarrow J(3;-3)$.

Vì J là trung điểm của IC nên I(7;-4). Từ đó suy ra BI có phương trình $y+4=0$

BC đi qua H và C nên có phương trình $x-y-1=0$.

Do đó, B(x;y) là nghiệm của hệ $\begin{cases}y+4=0\\x-y-1=0\end{cases}\Rightarrow B(-3;-4)$

Vì $\widehat{INC}=1v\Rightarrow\widehat{NKC}=1v$ Từ đó gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường thẳng BI. Khi đó K là trung điểm của CC' nên C'(-1;-6).

Đường thẳng AB qua B và C' có phương trình là: $x+y+7=0$

Giả sử AC có VTPT $\vec{n}=(a;b),(a^2+b^2\neq 0)$

Khi đó AC có phương trình $a(x+1)+b(y+2)=0\Leftrightarrow ax+by+a+2b=0$

Ta có $d(I,AC)=IH\Leftrightarrow\frac{|7a-4b+a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|8a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=-1\\\frac{a}{b}=\frac{23}{7}\end{array}\right.$

+ $\frac{a}{b}=-1$ chọn a = 1, b = -1 nên AC có phương trình $x-y-1=0$ (trùng BC) (loại).

+ $\frac{a}{b}=\frac{23}{7}$ chọn a = 23 ; b = 7 nên AC có phương trình $23x+7y+37=0$

+ Khi đó A (x; y) là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y+7=0\\23x+7y+37=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{4}\\y=-\frac{31}{4}\end{cases}$

Vậy $A(\frac{3}{4};-\frac{31}{4})$

Bài 30: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Biết phương trình cạnh BC là $(d): x+7y-31=0$, điểm N(7; 7) thuộc đường thẳng AC, điểm M(2; -3) thuộc AB và nằm ngoài đoạn AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

THPT Bắc Yên Thành

Lời giải tham khảo:

Đường thẳng AB đi qua M nên có phương trình $a(x-2)+b(y+3)=0\ (a^2+b^2\neq 0)$

$(AB;BC)=45^0$ nên $\cos 45^0 = \dfrac{|a+7b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3a=4b\\4a=-3b\end{array}\right.$.

Nếu 3a = 4b, chọn a = 4, b = 3 ta được $(AB): 4x+3y+1=0$. $(AC): 3x-4y+7=0$.

Từ đó A(-1; 1) và B(-4; 5). Kiểm tra $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA}$ nên M nằm ngoài đoạn AB (TM)

Từ đó tìm được C(3; 4)

Nếu 4a = -3b, chọn a = 3, b = -4 được $(AB): 3x-4y-18=0$, $(AC): 4x+3y-49=0$

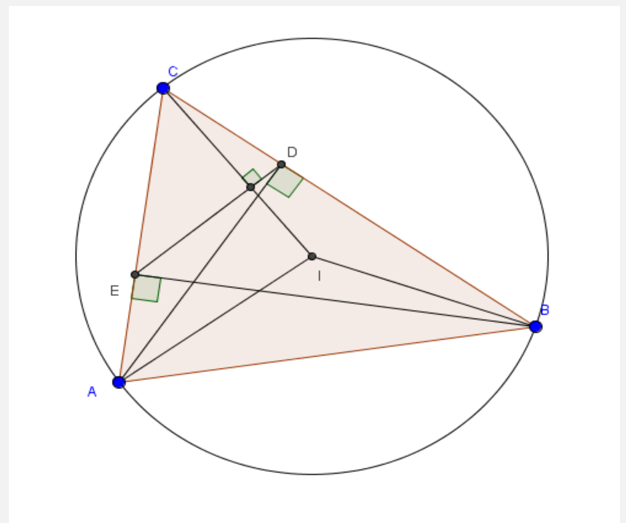
Từ đó A(10; 3) và B(10;3) (loại)

Bài 31: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE và nội tiếp đường tròn tâm I(5;4). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết D(4;4), E(6;5) và đỉnh C thuộc đường thẳng $x-2y-2=0$

Chuyên khoa học tự nhiên, lần 3.

Lời giải tham khảo:

$ICA = \dfrac{180^0 - CIA}{2} = 90^0 - ABC, ABC = CED => IEC + CED = 90^0 \Rightarrow IC \perp DE$. Suy ra $\overrightarrow{DE}(2;1)$ là VTPT của đường thẳng IC suy ra phương trình IC là : $2x + y - 14 = 0$. Mà C thuộc đường thẳng $d: x - 2y - 2 = 0 => C(6;2)$



Phương trình $CE: \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 + 3t \end{cases} => A(2+3a;6)$

$IA^2 = 1 + \ -2+3a\ ^2 = 5 => a = 6$ (a = 0 loại)

Suy ra : $A(6;6)$. Phương trình CD là : $\begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

$=> B(6-2a;2+2b)$

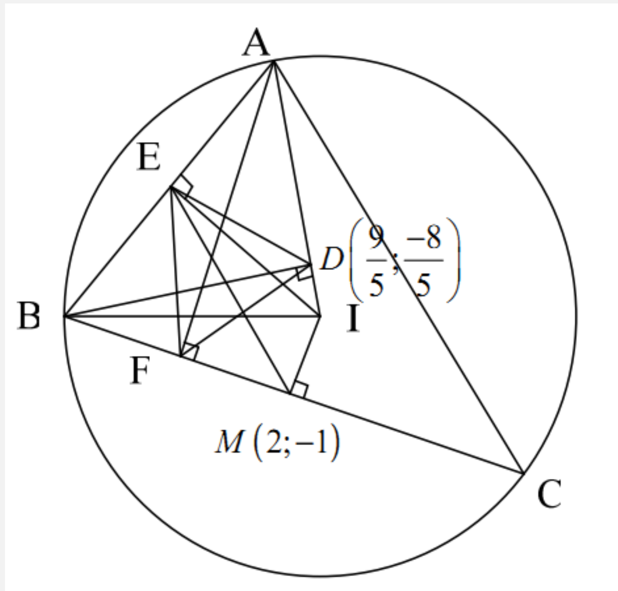
$=> IB^2 = \ 1-2b\ ^2 + \ -2+2b\ ^2 = 5$

$=> b = \dfrac{3}{2}$ ($b = 0$ loại) suy ra : $B(3;5)$

Bài 32: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I, điểm $M(2;-1)$ là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của B lên AI là

$D\left(\frac{9}{5};-\frac{8}{5}\right)$; Biết rằng AC có phương trình x + y − 5 = 0 , tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

THPT Nguyễn Văn Trỗi, lần 1



Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên BC, E là trung điểm AB. Ta có tứ giác BFDA nội tiếp đường tròn đường kính AB và ngủ giác BEDIM nội tiếp đường tròn đường kính BI

Suy ra $\angle DEM = \angle DBM = \angle DBF = \frac{1}{2}\angle DEF$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắnmột cung)

nên EM là phân giác của góc $\angle DEF$, lại có $EF = DE = \frac{1}{2}AB$ nên ME là đường trung trực của DF. Đường thẳng ME qua M và song song với AC nên có phương trình x + y − 1= 0 , F đối xứng với D qua ME nên $F\left(\frac{13}{5};-\frac{6}{5}\right), \overrightarrow{MF}\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$ nên véc tơ pháp tuyến của BC là $\vec{n}\ 1;-3$ suy ra phương trình BC là : $x-3y-5=0$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ sau :

$\begin{cases} x-3y-5=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$. M là trung điểm BC suy ra B (−1;−2)

, AF qua F và vuông góc với BC nên có phương trình $3x+y-\frac{33}{5}=0$ suy ra tọa độ điểm A là nghiệm

của hệ $\begin{cases} 3x+y-\frac{33}{5}=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;4)$

Bài 33: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác *ABC* có hai điểm $M\left(3;\frac{1}{4}\right)$ và $N\left(\frac{38}{25};\frac{34}{25}\right)$ nằm trên đường thẳng *AB*, phương trình đường thẳng *AC* là $3x-4y+6=0$. Tìm tọa độ các đỉnh *A*, *B*, *C* biết tâm *I* của đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* nằm trên đường thẳng $d: x-y-2=0$ và có hoành độ lớn hơn 1, đồng thời điểm *P* là chân đường phân giác trong *AI* có hình chiếu vuông góc lên đường thẳng *AB* là điểm *N*.

THPT Nguyễn Diệu, Bình Định

Lời giải tham khảo:

+)Lập được ptAB: 3x +4y – 10 = 0.

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+4y-10=0 \\ 3x-4y+6=0. \end{cases}$ Tìm được A(2/3;2).

+)Vì tâm đường tròn nội tiếp thuộc đường thẳng x – y – 2 = 0 nên I(a;a – 2), điều kiện a > 1.

Ta có d(I;AB) = d(I;AC)

$\Leftrightarrow |7a-18| = |-a+14|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4(n) \\ a = \frac{2}{3}(l) \end{array} \right.$

Vậy I(4;2) và bán kính đường tròn nội tiếp r = 2.

+)Lập pt AI: y–2 = 0.

Lập pt PN: 4x –3y – 2 = 0.

P là giao điểm của AI và PN nên tọa độ P là nghiệm của hệ

$\begin{cases} y-2=0 \\ 4x-3y-2=0 \end{cases}$ giải được P(2;2)

+)BC qua P(2;2) và có VTPT $\vec{n}=(a;b)$ có pt dạng $a(x-2)+b(y-2)=0.$

Ta có d(I;BC) = r

$\Leftrightarrow \frac{|2a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \Leftrightarrow |a| = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow b=0.$ Chọn a = 1

Khi đó pt BC là x – 2 = 0.

Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+4y-10=0 \\ x-2=0. \end{cases}$ Tìm được tọa độ B(2;1) .

Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x-4y+6=0 \\ x-2=0. \end{cases}$ Tìm được tọa độ C(2;3).

Bài 34: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(4;-3)$, M là trung điểm của cạnh BC, D là giao điểm giữa đường phân giác trong của góc MAC và cạnh BC. Biết rằng $CB=3CD$, đường thẳng AD có phương trình $3x-2y-5=0$, diện tích tam giác ABC bằng $\frac{39}{4}$ và đỉnh C có hoành độ dương. Hãy tính tọa độ các điểm A, C.

THPT Phù Cát 1, Bình Định

Lời giải tham khảo:

+) Gọi E là điểm đối xứng của A qua M thì $AB//CE$. Xét tam giác ACE có AM là trung tuyến, $CD=\frac{2}{3}CM$ nên D là trọng tâm, AD là phân giác của góc EAC nên tam giác AEC cân tại A, suy ra $AD \perp EC$ suy ra $AD \perp AB$. Suy ra A là hình chiếu vuông góc của B trên AD, suy ra $A(1;-1)$.

+) Do $D \in AD \Rightarrow D\left(t;\frac{3t-5}{2}\right)(D \neq A \Rightarrow t \neq 1)$

+) Từ $\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BD} \Rightarrow C\left(\frac{3t-4}{2};\frac{9t-9}{2}\right),\left(t>\frac{4}{3}\right)$

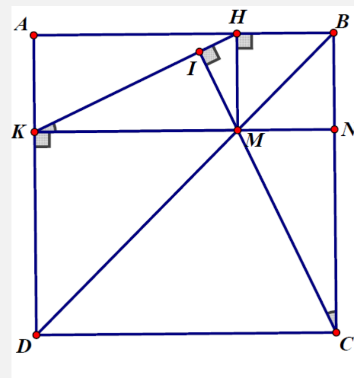
+) Do $d(C;AB)=\frac{2S_{ABC}}{AB}=\frac{3\sqrt{13}}{2}$, từ đó suy ra $t=3$, suy ra $C\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Phần II. Các bài toán về tứ giác

Bài 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x+2y-6=0$, điểm $M(1;1)$ thuộc cạnh BD biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên cạnh AB và AD đều nằm trên đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Lần 1– Trường THPT Bình Minh – Ninh Bình

Lời giải tham khảo



✍ ***Tính chất:*** $CI \perp HK$

➢ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AD

Gọi N là giao điểm của KM và BC

Gọi I là giao điểm của CM và HK

Ta có ΔDKM vuông tại K và $MDK = 45^0$

$\Rightarrow KM = KD \Rightarrow KM = NC$ (1)

Lại có $MH = MN$ (do $MHBN$ là hình vuông)

Suy ra: $\Delta KMH = \Delta CNM \Rightarrow HKM = MCN$

Mà $NMC = IMK$ nên $NMC + NCM = IMK + HKM = 90^0$

Suy ra $CI \perp HK$

➢ Đường thẳng CI đi qua $M(1;1)$ và vuông góc với đường thẳng d nên

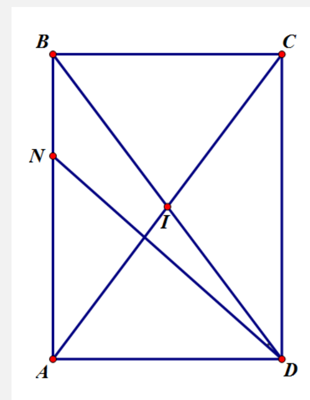
$VTPT\ \overrightarrow{n_{CI}} = VTCP\ \overrightarrow{u_d} = (-1;1)$ nên có phương trình: $-(x-1)+(y-1)=0 \Leftrightarrow x-y=0$

Do điểm C thuộc đường thẳng CI và đường thẳng Δ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ Vậy $C(2;2)$

Bài 2 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm I(1;3). Gọi N là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AN = \frac{2}{3}AB$. Biết đường thẳng DN có phương trình x+y-2=0 và AB=3AD. Tìm tọa độ điểm B.

Lần 2– Trường THPT Bố Hạ – Bắc Giang

Lời giải tham khảo



➢ Gọi $\vec{n} = (a;b); (a^2+b^2 \neq 0)$ là vectơ pháp tuyến của BD,

BD đi qua điểm I(1;3) nên có phương trình: $ax+by-a-3b=0$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} AN = \frac{2}{3}AB \\ AD = \frac{1}{3}AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NB = \frac{AB}{3} \\ ND = \frac{\sqrt{5}AB}{3} \\ BD = \frac{\sqrt{10}AB}{3} \end{cases}$

Nên ta suy ra: $\left|\cos BDN\right| = \left|\dfrac{BD^2 + ND^2 - NB^2}{2BD.ND}\right| = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

Khi đó: $\cos BDN = \left|\cos(\vec{n}, \overrightarrow{n_1})\right| = \dfrac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{10} \Leftrightarrow 24a^2 + 24b^2 - 50ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a = 4b \\ 4a = 3b \end{array}\right.$

➢ Với $3a = 4b$, chon a=4,b=3 suy ra: $BD: 4x + 3y - 13 = 0$

Mà $D = BD \cap DN \Rightarrow D(7;-5) \Rightarrow B(-5;11)$

➢ Với $4a = 3b$, chọn a=3,b=4, PT $BD: 3x + 4y - 15 = 0$

Mà $D = BD \cap DN \Rightarrow D(-7;9) \Rightarrow B(9;-3)$

Bài 3: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho hình vuông $ABCD$. Điểm $E(2;3)$ thuộc đoạn thẳng BD, các điểm $H(-2;3)$ và $K(2;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm E trên AB và AD. Xác định toạ độ các đỉnh A, B, C, D của hình vuông $ABCD$.

Lần 1– Trường THPT Nguyễn Huệ – Khánh Hoà

Lời giải tham khảo

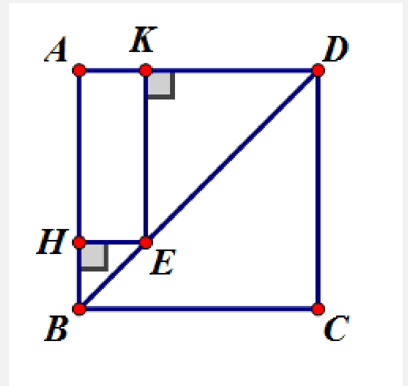
➢ Ta có: $EH: y - 3 = 0$

$EK: x - 2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} AH: x + 2 = 0 \\ AK: y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2;4)$

➢ Giả sử $\vec{n}(a;b)$, $(a^2 + b^2 > 0)$ là VTPT của đường thẳng BD.

Có: $ABD = 45^0$ nên: $\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \pm b$



- Với $a = -b$, chọn $b = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow BD: x - y + 1 = 0$

$\Rightarrow B(-2;-1); D(3;4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EB} = (-4;-4) \\ \overrightarrow{ED} = (1;1) \end{cases} \Rightarrow E$ nằm trên đoạn BD (thỏa mãn)

Khi đó: $C(3;-1)$

- Với $a = b$, chọn $b = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow BD: x + y - 5 = 0$.

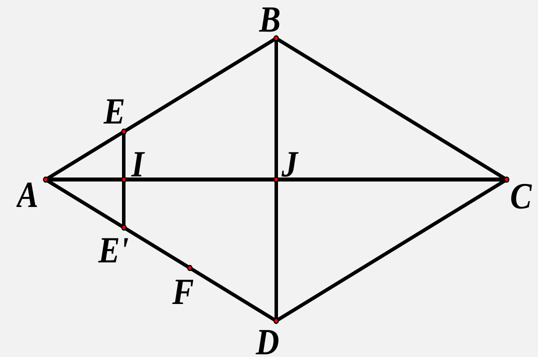
$\Rightarrow B(-2;7); D(1;4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EB} = (-4;4) \\ \overrightarrow{ED} = (-1;1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = 4\overrightarrow{ED} \Rightarrow E$ nằm ngoài đoạn BD (Loại)

➢ Vậy: $A(-2;4); B(-2;-1); C(3;-1); D(3;4)$

Bài 4: Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hình thoi *ABCD* có đường chéo *AC* nằm trên đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$. Điểm $E(9;4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh *AB*, điểm $F(-2;-5)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh *AD*, $AC = 2\sqrt{2}$. Xác định tọa độ các đỉnh hình thoi *ABCD* biết điểm *C* có hoành độ âm.

Lần 1 - Cao Đẳng nghề Nha Trang

Lời giải tham khảo



➢ Gọi E' là điểm đối xứng với E qua AC

$\Rightarrow E'$ thuộc AD.

+) Vì EE' vuông góc với AC và qua điểm $E(9;4)$

$\Rightarrow$ phương trình EE': $EE': x-y-5=0$

➢ Gọi $I = AC \cap EE'$, tọa độ I là nghiệm hệ:

$\begin{cases} x-y-5=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2)$

+)Vì I là trung điểm của EE' $\Rightarrow E'(-3;-8)$

➢ AD qua $E'(-3;-8)$ và $F(-2;-5) \Rightarrow$ phương trình AD: $AD: 3x-y+1=0$

+) $A = AC \cap AD \Rightarrow A(0;1)$.

+) Giả sử $C(c;1-c)$. Vì $AC = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow c^2 = 4 \Leftrightarrow c = 2; c = -2 \Rightarrow C(-2;3) \quad (x_C < 0)$

➢ Gọi J là trung điểm AC $\Rightarrow J(-1;2) \Rightarrow$ phương trình BD: $x-y+3=0$.

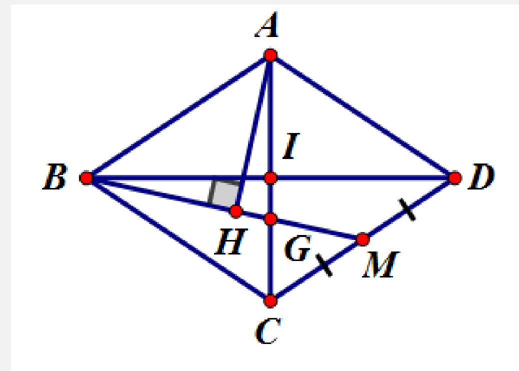
+) Do $D = AD \cap BD \Rightarrow D(1;4) \Rightarrow B(-3;0)$.

➢ Vậy $A(0;1)$, $B(-3;0), C(-2;3), D(1;4)$.

Bài 5: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thoi ABCD có BD = 2AC. Đường thẳng BD có phương trình x – y = 0. Gọi M là trung điểm của CD và H(2;-1) là hình chiếu vuông góc của A trên BM. Viết phương trình đường thẳng AH.

Trường Ischool Nha Trang-Khánh Hoà

Lời giải tham khảo



➢ Gọi I là tâm của hình thoi ABCD và $G = BM \cap AC$, suy ra G là trọng tâm của tam giác BCD.

+) Tam giác BIG vuông tại I có:

$$\sin IBG = \frac{IG}{BG} = \frac{IG}{\sqrt{BI^2 + IG^2}} = \frac{IG}{\sqrt{(6IG)^2 + IG^2}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$$

$$\Rightarrow \cos(BD, AH) = \sin IBH = \frac{1}{\sqrt{37}}$$

➢ Đường thẳng BD có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (1;-1)$

gọi vectơ pháp tuyến của AH là $\overrightarrow{n_2} = (a;b)\ (a^2+b^2 \neq 0)$. Ta có:

$$\cos(BD.AH) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{37}} \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{37}} \Leftrightarrow 35a^2 - 74ab + 35b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{7}{5} \\ \frac{a}{b} = \frac{5}{7} \end{array}\right.$$

+) Với $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$: Chọn $\overrightarrow{n_2} = (7;5)$,ta có phương trình AH là $AH: 7x+5y-9=0$.

+) Với $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$: Chọn $\overrightarrow{n_2} = (5;7)$,ta có phương trình AH là $AH: 5x+7y-3=0$.

➢ Vậy $AH: 7x+5y-9=0$ hoặc $AH: 5x+7y-3=0$.

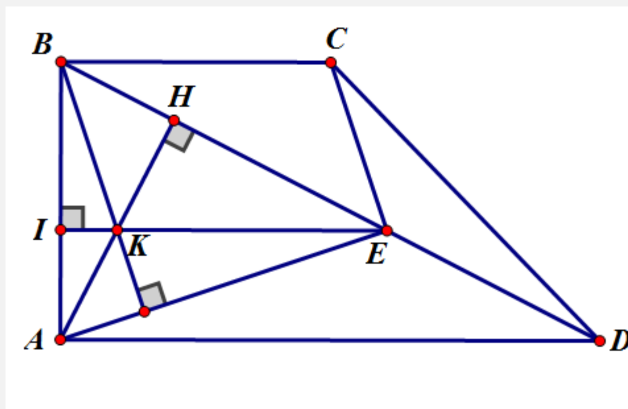
Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A, B và AD =

2BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn HD. Giả sử $H(-1;3)$, phương trình đường thẳng $AE: 4x+y+3=0$ và $C\left(\frac{5}{2};4\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang ABCD.

Lần 2 –Trường THPT Phước Bình

Lời giải tham khảo

✍ **Tính chất hình học:** $CE \perp AE$



+) Qua E dựng đường thẳng song song với AD cắt AH tại K và cắt AB tại I.

+) Suy ra: K là trực tâm của tam giác ABE, nên BK $\perp$AE. Do KE là đường trung bình của tam giác AHD nên $KE //= \frac{1}{2}AD$ hay $KE //= BC$, nên cho tam tứ giác BKEC là hình bình hành, dẫn tới $CE \parallel BK$.

+) Do đó: $CE \perp AE \Rightarrow CE:\ 2x-8y+27=0$

Mà $E = AE \cap CE \Rightarrow E\left(-\frac{3}{2};3\right)$, mặt khác E là trung điểm của HD nên $D(-2;3)$

➢ Khi đó, phương trình đường thẳng $BD: y-3=0$, suy ra $AH: x+1=0$ nên $A(-1;1)$.

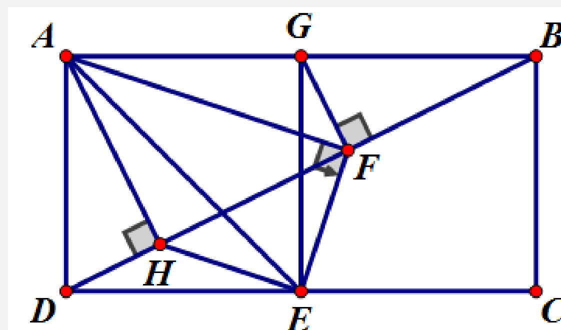
➢ Suy ra $AB: x-2y+3=0$.Do đó: $B = AB \cap BD \Rightarrow B(3;3)$

➢ Vậy: $A(-1;\ 1)$, $B(3;\ 3)$, $D(-2;\ 3)$

Bài 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AB=2BC. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD; E,F lần lượt là trung điểm đoạn CD và BH. Biết A(1;1), phương trình đường thẳng EF là 3x – y – 10 = 0 và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Lần 5 –Trường THPT Phước Bình

Lời giải tham khảo



✍ Tính chất hình học: $AF \perp EF$

➢ Gọi E,F,G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CD, BH, AB.

+) Ta thấy các tứ giác ADEG và ADFG nội tiếp đường tròn đường kính DG, mà $DG = AE$ nên AE cũng là đường kính, đồng thời tứ giác ADEF cũng nội tiếp dẫn tới: $AF \perp EF$.

➢ Đường thẳng AF (qua A và vuông góc với EF) có pt $AF: x+3y-4=0$. Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}3x-y=10\\x+3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{17}{5}\\y=\dfrac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow F\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{1}{5}\right)\Rightarrow AF=\sqrt{\dfrac{32}{5}}$$

$$\Delta AFE\sim\Delta DCB\quad(g-g)\Rightarrow EF=\frac{1}{2}AF=2\sqrt{\frac{2}{5}};$$

$$E(t;3t-10)\Rightarrow EF^2=\frac{8}{5}\Leftrightarrow\left(t-\frac{17}{5}\right)^2+\left(3t-\frac{51}{5}\right)^2=\frac{8}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5t^2-34t+57=0\Leftrightarrow t=3\vee t=\frac{19}{5}\text{ hay }E(3;-1)\vee E\left(\frac{19}{5};\frac{7}{5}\right)$$

+) Theo giả thiết ta được $E(3;-1)$, phương trình $AE: x+y-2=0$.

➢ Gọi $D(x;y)$, tam giác ADE vuông cân tại D nên:

$$\begin{cases}AD=DE\\AD\perp DE\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+1)^2\\(x-1)(x-3)=(y-1)(y+1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-2\\(x-1)(x-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\text{ hay D(1;-1)}\vee\text{D(3;1)}$$

+) Vì D và F nằm về hai phía so với đường thẳng AE nên D(1;-1).

+) Khi đó, C(5;-1); B(1;5). (Tìm được C vì DE nhận E làm trung điểm, tìm D bằng đẳng thức $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$).

➢ Vậy B(1;5); C(5;-1) và D(1;-1).

Bài 8: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ và M là một điểm thuộc cạnh CD $M\neq C,D$. Qua điểm A dựng đường thẳng d vuông góc với AM, d cắt đường thẳng BC tại điểm N. Biết rằng trung điểm của đoạn thẳng MN là gốc tọa độ O, I là giao điểm của AO và BC. Tìm tọa độ điểm B của hình vuông biết A $-6;4$,O $0;0$,I $3;-2$ và điểm N có hoành độ âm.

Lần 2 –Trường THPT chuyên Hùng Vương

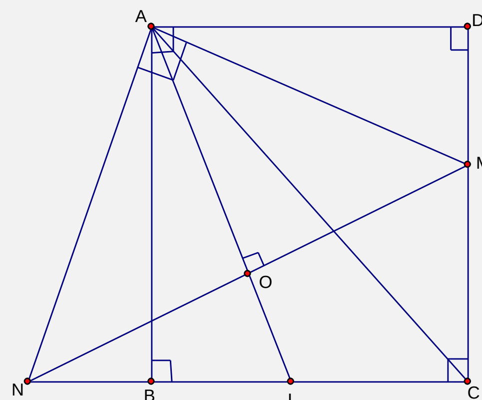
Lời giải tham khảo:

✍ Tính chất hình học: Tam giác AMN vuông cân tại A.

➢ Do tứ giác AMCN nội tiếp, suy ra $AMN=NCA=45^0$ nên tam giác AMN vuông cân tại A, khi đó $AO\perp MN$ tại O, nên ta viết được phương trình đường thẳng:

$$MN: 3x-2y=0$$

➢ Giả sử $N(2n;3n)\in MN\Rightarrow M(-2n;-3n)$



+) Ta có: $\overrightarrow{AN} = (2n+6;3n-4); \overrightarrow{AM} = (-2n+6;-3n-4)$

+) Do: $AN \perp AM \Rightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow (2n+6)(-2n+6)+(3n-4)(-3n-4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=-2 \end{array}\right. \Rightarrow N(-4;-6)$

➢ Phương trình đường thẳng BC qua N và I là $BC: 4x-7y-26=0$,

+) Phương trình đường thẳng AB qua A và vuông góc với BC là $AB: 7x+4y+26=0$

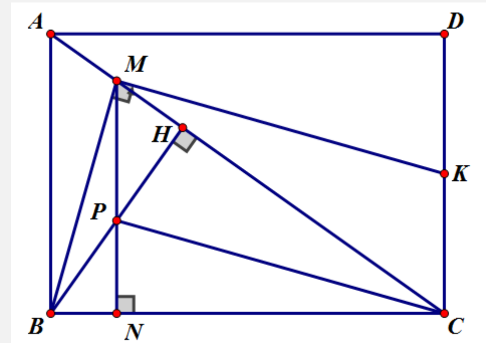
➢ Vì $B = BC \cap AB$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x-7y=26 \\ 7x+4y=-26 \end{cases} \Rightarrow B\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{22}{5}\right)$

Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD, đỉnh B thuộc đường thẳng d_1: $2x - y + 2 = 0$, đỉnh C thuộc đường thẳng d_2: $x - y - 5 = 0$, Gọi H là hình chiếu của B xuống đường chéo AC, Biết $M\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{2}{5}\right)$; K(9;2) lần lượt thuộc trung điểm AH và CD. Tìm hoành độ các đỉnh của hình chữ nhật biết hoành độ đỉnh C lớn hơn 4

Lần 1 –Trường THPT Đồng Xoài

Lời giải tham khảo:

✍ **Tính chất hình học:** $MK \perp MB$



➢ Qua M kẻ đường thẳng song song với CD cắt BH, BC lần lượt tại P, N. Tứ giác MKCP là hình bình hành (do MP//CK, $MP = CK = \dfrac{1}{2}AB$)

+) Mặt khác ta có MN ⊥ BC và BH ⊥ MC suy ra P là trực tâm của tam giác MBC.

+) Vậy CP ⊥ BM suy ra MK ⊥ MB

➢ Gọi $B(b;2b+2) \in d_1 \Rightarrow \overrightarrow{MB} = \left(b-\dfrac{9}{5};2b+\dfrac{8}{5}\right), \overrightarrow{MK} = \left(\dfrac{36}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

+) Vì $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MK} = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow B(1;4)$

➢ Gọi $C(c;c-5) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (c-1;c-9); \overrightarrow{KC} = (c-9;c-7)$

+) Vì $BC \perp CK \Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{KC} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=4 \end{array}\right. \Rightarrow C(9;4)$

➢ Nên ta có $C(9;4)$ và $D(9;0)$ $A(1;0)$

Bài tập tương tự 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh B thuộc đường tròn (C): $x^2+y^2=10$, đỉnh C thuộc đường thẳng có phương trình: $x+2y-1=0$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của B lên AC. Trung điểm của AM và CD lần lượt là $N\left(\dfrac{-3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$ và P(1;1). Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết rằng điểm B có hoành độ dương và điểm C có tung độ âm.

(lần 1–Trường THPT Quỳnh Lưu 2 Nghệ An)

Phân tích và hướng dẫn đáp số:

Gọi Q là trung điểm BM, khi đó $\begin{cases} NQ//AB \\ NQ=\frac{1}{2}AB \end{cases}$ suy ra PCQN là hình bình hành.

Suy ra CQ//PN.

Trong tam giác BCN thì Q là trực tâm nên CQ vuông góc với BN. Vì vậy PN vuông góc với BN.

Đáp số: $A(-3;1), B(1;-3), C(3;-1), D(-1;3)$

Bài tập tương tự 2: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm H(1;2) là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm $M(\frac{9}{2};3)$ là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ADH là d: $4x+y-4=0$. Viết phương trình cạnh BC.

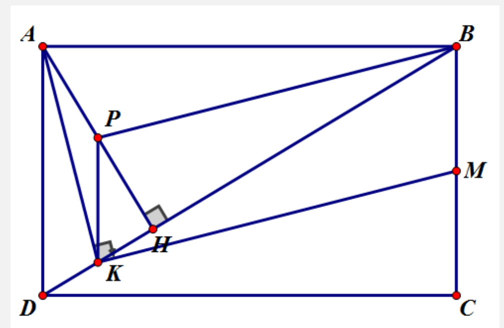
(lần 3–Trường THPT Phú riềng – Bình Phước)

Đáp số: $BC: 2x+y-12=0$

Bài 10: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm H(1;2) là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ADH là $d: 4x+y-4=0$. Viết phương trình cạnh BC.

Lần 3 –Trường THPT Phú Riềng- Bình Phước

Lời giải tham khảo:



✍ **Tính chất hình học:** $MK \perp AK$

➢ Gọi K là trung điểm của HD. Gọi P là trung điểm của AH.

+) Ta có AB vuông góc với KP. Do đó P là trực tâm của tam giác ABK. Suy ra BP vuông góc với KM.

+) Mặt khác, do BMKP là hình bình hành nên cho ta $KM \parallel KM$, nên suy ra $MK \perp AK$.

➢ MK đi qua $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ và vuông góc với AK có pt: $MK: x-4y+\frac{15}{2}=0$

+) $K = MK \cap d$ nên tọa độ điểm K là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-4y+\frac{15}{2}=0 \\ 4x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{1}{2};2\right)$

+) Do K là trung điểm của HD nên $D(0;2)$,suy ra phương trình đường thẳng $BD: y-2=0$

+) AH qua H và vuông góc với BD nên có phương trình: $AH: x-1=0$

+) Tham số hóa điểm $B(b;2)$, vì M là trung điểm BC nên $C(9-b;4)$

+) Ta có: $\overrightarrow{DC}=(9-b;2);\overrightarrow{BC}=(9-2b;2)$ mà DC vuông góc với BC nên suy ra: $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=5\\ b=\dfrac{17}{2}\end{array}\right.$

+) Nên điểm $B(5;2)\Rightarrow C(4;4)$ hoặc $B\left(\dfrac{17}{2};2\right)\Rightarrow C\left(\dfrac{1}{2};4\right)$

➢ Phương trình đường thẳng $BC:2x+y-12=0$ hoặc $BC:2x+8y-33=0$

Bài tập tương tự: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC, M và N lần lượt là trung điểm của AH và BH, trên cạnh CD lấy điểm K sao cho MNCK là hình bình hành. Biết $M\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{2}{5}\right);K(9;2)$ và các đỉnh B, C lần lượt nằm trên các đường thẳng có phương trình $2x-y+2=0$ và $x-y-5=0$, hoành độ đỉnh C lớn hơn 4. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D.

lần 2–Trường THPT Yên Thế

Lời giải tham khảo:

+) MN là đường trung bình của tam giác HAB suy ra MN // AB và $MN=\dfrac{1}{2}AB$

+) MNCK là hình bình hành nên CK // MN; $CK=MN=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}CD$

suy ra K là trung điểm của CD và N là trực tâm tam giác BCM,
do đó $CN\perp MB$ và MK // CN nên $MK\perp MB$.

$B\in d\Rightarrow B(b;2b+2),\overrightarrow{MK}=\left(\dfrac{36}{5};\dfrac{8}{5}\right),\overrightarrow{MB}=\left(b-\dfrac{9}{5};2b+\dfrac{8}{5}\right)$

$\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{MB}=0\Rightarrow b=1\Rightarrow B(1;4)$

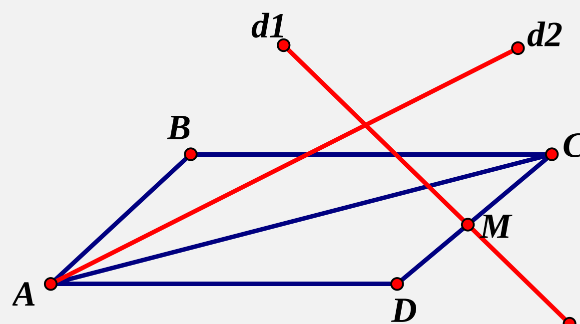
$C\in d'\Rightarrow C(c;c-5)$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{KC}=0\Rightarrow c=9\Rightarrow C(9;4)\Rightarrow D(9;0)\Rightarrow A(1;0)$

Bài 11: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có tọa độ điểm D(5; 4). Đường trung trực của đoạn CD có phương trình $d_1:2x+3y-9=0$ và đường phân giác trong góc BAC của tam giác ABC có phương trình $d_2:5x+y+10=0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành ABCD.

Lần 1 –Trường THPT Thanh Hoa - Bình Phước

Lời giải tham khảo:



➢ Phương trình đường thẳng DC qua D và vuông góc với d_1 có dạng $DC:3x-2y-7=0$

+) $M=CD\cap d_1\Rightarrow M(3;1)$

+) M là trung điểm DC nên $C(1;-2)$

➢ Ta lại có A thuộc d_2 nên $A(a;-5a-10)$

Mà ABCD là hbh nên

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - a = -4 \\ y_B + 5a + 10 = -6 \end{cases} \Rightarrow B(a-4;-5a-16)$$

➢ Gọi C′ là điểm đối xứng của C qua d_2, ta có: $C'(-4;-3) \in AB$

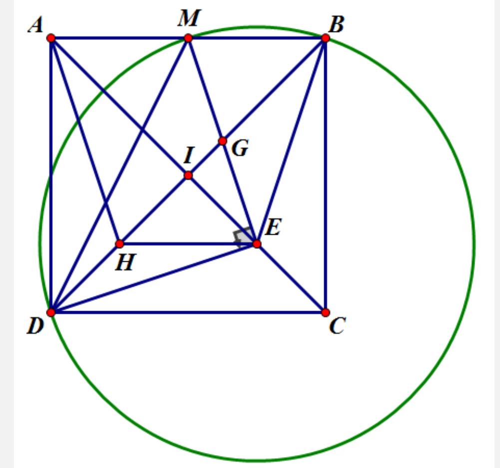
+) Ta có: A, B, C′ thẳng hàng $\overrightarrow{C'A} = k\overrightarrow{C'B} \Leftrightarrow \frac{a+4}{a} = \frac{-5a-7}{-5a-13} \Leftrightarrow a = -2$

➢ Vậy $A(-2;0)$ *và* $B(-6;-6)$.

Bài 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD tâm I. Biết trung điểm cạnh AB là M(0;3), trung điểm đoạn thẳng IC là E(1;0) và điểm A có tọa độ nguyên. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.

Trường THPT Nguyễn Du – Bình Phước

Lời giải tham khảo:



✍ **Tính chất hình học:** $ME \perp DE$

+) Gọi H là trung điểm DI, khi đó H là trực tâm tam giác ADC (chứng minh tương tự các bài trên), nên $AH \perp DE$

+) Đồng thời AMEH là hình bình hành nên $AH \parallel DE$

+) Suy ra: $ME \perp DE$

➢ Phương trình $DE: x-3y-1=0$

+) Tham số hóa điểm $D(3d+1;d) \in DE$

+) Để ý thấy rằng: $\Delta MGB = \Delta EGH$, khi đó cho ta G là trung điểm ME nên $G\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

➢ Tứ giác AMED nội tiếp, nên cho ta $DAE = AME = 45^0$ nên cho ta tam giác EMD vuông cân tại E.

➢ Phương trình đường tròn (C) tâm E bán kính ME có dạng: $(C):(x-1)^2+y^2=10$

+) $D=(C)\cap DE$ nên tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=10 \\ x-3y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}\end{array}\right.$

➢ TH1: $D(-2;-1)$, ta lập được phương trình AC đi qua E và nhận $\overrightarrow{DG}=\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ làm VTPT nên có dạng: $AC: x+y-1=0$

+) Phương trình $BD: x-y+1=0$

+) $I = AC \cap BD \Rightarrow I(0;1)$

+) Từ đó ta tìm được $B(2;3) \Rightarrow A(-2;3) \Rightarrow C(2;-1)$

➢ TH2: $D(4;1)$ ta lập được phương trình AC đi qua E và nhận $\overrightarrow{DG}=\left(\frac{-7}{2};\frac{1}{2}\right)$ làm VTPT nên có dạng: $AC: 7x-y-7=0$

+) Phương trình $BD: x+7y-11=0$

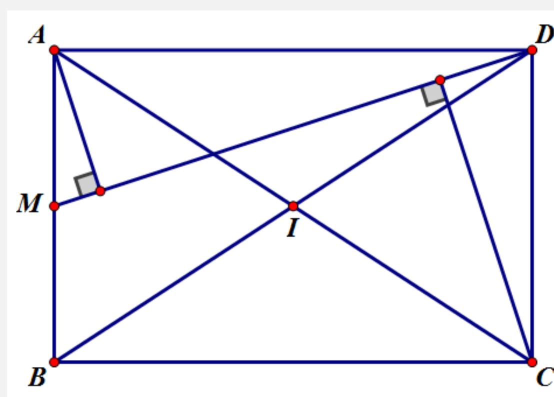
+) $I = AC \cap BD \Rightarrow I\left(\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)$

+) Từ đó ta tìm được $B\left(-\frac{8}{5};\frac{9}{5}\right) \Rightarrow A\left(\frac{8}{5};\frac{21}{5}\right)$ (loại do tọa độ A nguyên).

Bài 13: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi M là trung điểm của AB. Đường thẳng (d) đi qua M và D có phương trình $x-2y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D, biết $A(1;4)$ và đỉnh C nằm trên đường thẳng $(\Delta): x+y-5=0$ và hoành độ điểm C lớn hơn 3.

Trường THPT Chuyên Bình Long- Bình Phước

Lời giải tham khảo:



➢ Ta có điểm C nằm trên đường thẳng $(\Delta): x+y-5=0 \Rightarrow C(c;5-c), (c\in\mathbb{R}, c>3)$.

+) Lại có:

$$d(C,MD) = 2.d(A,MD) = 2\frac{|1-2.4+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{|c-2(5-c)+2|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |3c-8| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = \frac{-2}{3}\ (l) \\ c = 6 \end{array}\right.$$

Suy ra $C(6;-1)$

+) Ta có điểm D nằm trên đường thẳng $(d): x-2y+2=0 \Rightarrow D(2d-2;d), (d\in\mathbb{R})$.

Lại có $\overrightarrow{AD} = (2d-3;d-4)$; $\overrightarrow{CD} = (2d-8;d+1)$

+) Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên

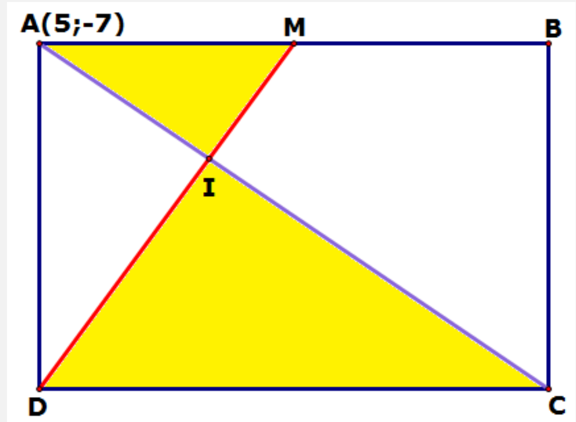
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (2d-3)(2d-8)+(d-4)(d+1) = 0 \Leftrightarrow 5d^2-25d+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=4 \end{array}\right.$$

➢ Kết luận: $C(6;-1)$, $D(0;1) \Rightarrow B(7;2)$ hoặc $C(6;-1)$, $D(6;4) \Rightarrow B(1;-1)$

Bài 14: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $A(5;-7)$, điểm C thuộc đường thẳng có phương trình $x-y+4=0$. Đường thẳng đi qua D và trung điểm của đoạn thẳng A B có phương trình $3x-4y-23=0$. Tìm tọa độ điểm B và C, biết B có hoành độ dương.

Lần 2–Trường THPT Hà Huy Tập

Lời giải tham khảo:



➢ Ta có $C \in x-y+4=0 \Rightarrow C(c;c+4)$, M là trung điểm AB và I là giao điểm AC và DM

+) Theo định lý Thales thuận ta có:

$$\frac{CD}{AM}=\frac{IC}{IA}=\frac{ID}{IM}=2 \Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow I\left(\frac{c+10}{3};\frac{c-10}{3}\right)$$

+) Mặt khác I thuộc DM nên ta có:

$$3\frac{c+10}{3}-4\frac{c-10}{3}-23=0 \Leftrightarrow c=1 \Rightarrow \boxed{C(1;5)}$$

+) Ta có M thuộc MD:

$$\Rightarrow M\left(m;\frac{3m-23}{4}\right) \Rightarrow B\left(2m-5;\frac{3m-9}{2}\right)$$

Và có thêm: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=\left(2m-10;\frac{3m+5}{2}\right) \\ \overrightarrow{CB}=\left(2m-6;\frac{3m-19}{2}\right) \end{cases}$

+) Lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow (2m-10)(2m-6)+\left(\frac{3m+5}{2}\right)\left(\frac{3m-19}{2}\right)=0$

+) Suy ra $m=1 \; hay \; m=\frac{29}{5}$

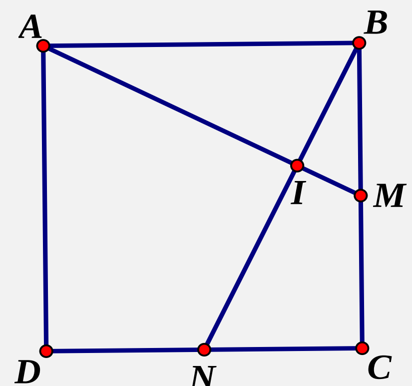
➢ Do đó $B(-3;-3) \; hay \; B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right)$. Do B có hoành độ dương nên ta nhận $B(\frac{33}{5};\frac{21}{5})$

➢ Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $B(\frac{33}{5};\frac{21}{5}),C(1;5)$

Bài 15: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ oxy , cho hình vuông ABCD có A(-1;3). Điểm B thuộc đường thẳng $d: x-2y-1=0$. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của BC và CD. AM cắt BN tại $I\left(\frac{7}{5};-\frac{1}{5}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông.

Trường THPT Trần Cao Sơn – Khánh Hoà

Lời giải tham khảo:



✍ **Tính chất hình học:** $AM \perp BN$

+) Ta có: $\widehat{BAI}=\widehat{IBM}$ mà $\widehat{BAI}+\widehat{IMB}=90^0$

Suy ra: $\widehat{IBM}+\widehat{IMB}=90^0$ hay $AM \perp BM$

➢ Phương trình đường thẳng $AM: 4x+3y-5=0$

+) Phương trình đường thẳng BN qua I và vuông góc với AM có dạng: $BN: 3x-4y-5=0$

+) $B=d \cap BN \Rightarrow B(3;1)$

➢ Phương trình đường thẳng $BC: 2x-y-5=0$

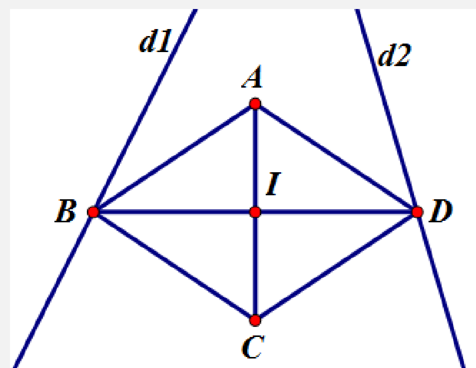
➢ $M=BC \cap AM \Rightarrow M(2;-1) \Rightarrow C(1;-3) \Rightarrow D(-3;-1)$

Bài 16: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ cạnh AC có phương trình là: $x+7y-31=0$,

hai đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x+y-8=0$, $d_2: x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết rằng diện tích hình thoi bằng 75 và đỉnh A có hoành độ âm

Trường THPT Lê Hồng Phong

Lời giải tham khảo:



- $B \in d_1 \Rightarrow B(b;8-b)$, $D \in d_2 \Rightarrow (2d-3;d)$

+) Khi đó $\overrightarrow{BD} = (-b+2d-3; b+d-8)$ và trung điểm của BD là $I\left(\frac{b+2d-3}{2}; \frac{-b+d+8}{2}\right)$

+) Theo tính chất hình thoi ta có:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{AC}}.\overrightarrow{BD} = 0 \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8b+13d-13=0 \\ -6b+9d-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=1 \end{cases}.$$

- Suy ra $B(0;8)$; $D(-1;1)$.

+) Khi đó $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$; $A \in AC \Rightarrow A(-7a+31; a)$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD \Rightarrow AC = \frac{2S_{ABCD}}{BD} = 15\sqrt{2} \Rightarrow IA = \frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left(-7a+\frac{63}{2}\right)^2 + \left(a-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{2} \Leftrightarrow \left(a-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(10;3)\ (ktm) \\ A(-11;6) \end{array}\right.$$

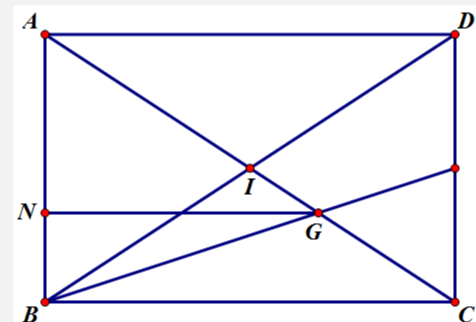
- Suy ra $C(10;3)$.

Bài 17: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 15. Đường thẳng AB có phương trình $x-2y=0$. Trọng tâm của tam giác BCD có tọa độ $G\left(\frac{16}{3}; \frac{13}{3}\right)$. Tìm tọa độ A, B, C, D biết B có tung độ lớn hơn 3.

Trường THPT Đông Du - Đăklăk

Lời giải tham khảo:

- $d(G;AB) = \frac{10}{3\sqrt{5}} \Rightarrow BC = \sqrt{5} \Rightarrow AB = 3\sqrt{5}$



+) Đường thẳng d qua G và vuông góc với AB là :

$d: 2x+y-15=0$

+) Gọi $N = d \cap AB \Rightarrow N(6;3) \Rightarrow NB = \frac{1}{3}AB = \sqrt{5}$

+) $B(2b;b) \in AB \Rightarrow NB^2 = 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=4 \end{array}\right. \Rightarrow B(8;4)$

- Ta có: $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BN} \Rightarrow A(2;1)$; $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Rightarrow C(7;6)$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow D(1;3)$

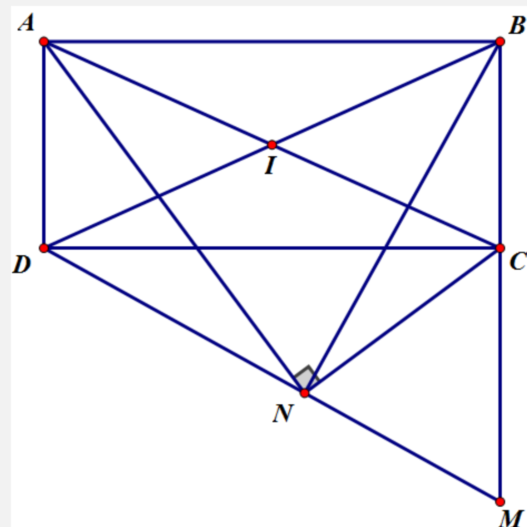
- Kết luận: $A(2;1)$; $B(8;4)$; $C(7;6)$; $D(1;3)$.

Bài 18: Cho hình chữ nhật ABCD có $A(1;5)$, $AB = 2BC$ và điểm C thuộc đường

thẳng $d: x+3y+7=0$. Gọi M là điểm nằm trên tia đối của tia CB, N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tìm tọa độ các điểm B và C biết $N\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và điểm B có tung độ nguyên.

Trường THPT- Lạc Long Quân – Khánh Hoà

Lời giải tham khảo:



✍ **Tính chất hình học:** $AN \perp CN$

+) Gọi $I = AC \cap BD$

+) Do tam giác BDN vuông tại N nên $IN = IB = ID$

Mà lại có $IC = IA = ID = IB \Rightarrow IN = IC = IA$

Suy ra tam giác ANC vuông tại N hay $AN \perp CN$

➢ Phương trình đường thẳng CN qua N và vuông góc với NC có dạng $CN: 7x+9y+13=0$

+) $C = d \cap CN \Rightarrow C(2;-3)$

➢ Giả sử $B(a;b)$. Do $AB = 2BC$; $AB \perp BC$ nên ta có hệ phương trình:

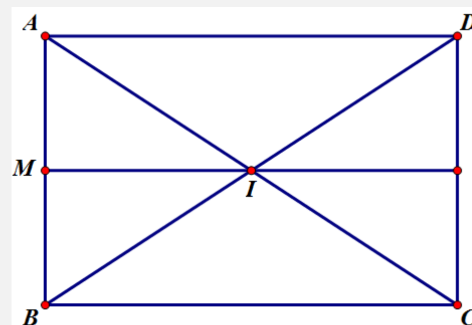
$$\begin{cases}(a-1)(a-2)+(b-5)(b+3)=0\\(a-1)^2+(b-5)^2=4\left((a-2)^2+(b+3)^2\right)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=5;\, b=-1\\a=-\frac{7}{5};\, b=-\frac{9}{5}\ (l)\end{array}\right.$$

➢ Vậy $B(5;-1)$; $C(2;-3)$

Bài 19: Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của hai đường thẳng (d): $x-y-3=0$ và (d’): $x+y-6=0$. Trung điểm M của AB là giao điểm của (d) với Ox và điểm A có tung độ dương. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Lần 2- Trường Trung cấp nghề Ninh Hoà

Lời giải tham khảo:



➢ Gọi I là giao điểm của (d) và (d’) suy ra $I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$

+) M là giao điểm của (d) và Ox suy ra $M(3;0)$

$$IM = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BC = 2IM = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

+) Gọi $A(x_A;y_A)$

Ta có $MA \perp MI \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow x_A + y_A - 3 = 0$ (1)

+) Mặt khác $MA = \frac{AB}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow MA^2 = (x_A-3)^2 + y_A^2 = 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A(4;-1)$ hoặc $A(2;1)$

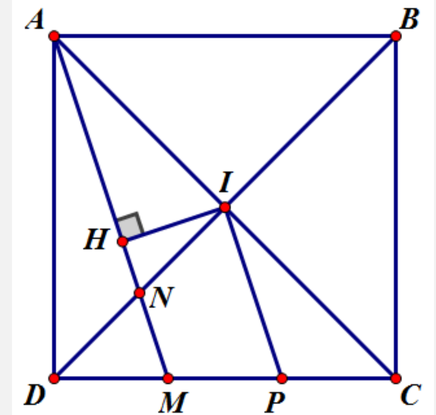
+) Do $y_A > 0$ nên $A(2;1)$; $B(4;-1)$

➢ Lấy đối xứng các điểm A, B qua tâm I ta được $C(7;2);D(5;4)$

Bài 20: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình vuông *ABCD* có tâm $I(3;-1)$, điểm *M* trên cạnh *CD* sao cho $MC=2MD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông *ABCD* biết đường thẳng *AM* có phương trình $2x-y-4=0$ và đỉnh *A* có tung độ dương.

Lần 1–Trường THPT Đoàn Thượng – Hải Dương

Lời giải tham khảo:



➢ Gọi H là hình chiếu của I trên AM $\Rightarrow IH=d(I;AM)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

+) Giả sử $AM\cap BD=N$ và P là trung điểm của MC

$\Rightarrow IP//AM\Rightarrow NM//IP$. Từ M là trung điểm của DP suy ra N là trung điểm của DI.

+) Gọi cạnh của hình vuông là a thì $AI=\dfrac{a\sqrt{2}}{2},IN=\dfrac{1}{2}ID=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Từ $\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{IA^2}+\dfrac{1}{IN^2}\Rightarrow\dfrac{5}{9}=\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{8}{a^2}\Rightarrow a=3\sqrt{2}$

+) *A* thuộc AM nên $A(t;2t-4)\Rightarrow IA=\sqrt{(t-3)^2+(2t-3)^2}=3\Leftrightarrow 5t^2-18t+9=0$

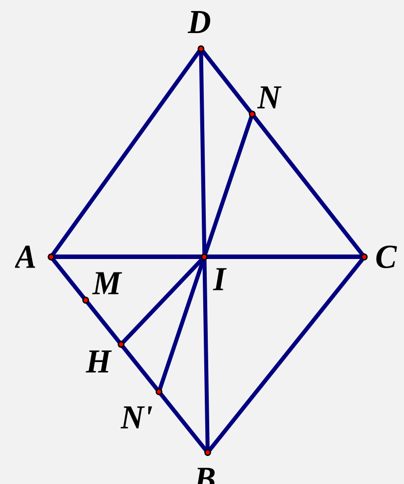
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\Rightarrow A(3;2)\\ t=\dfrac{3}{5}\Rightarrow A\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{14}{5}\right)\end{array}\right.$. Do A có tung độ dương nên $A(3;2)$

➢ Suy ra $C(3;-4)$. Đường thẳng BD đi qua điểm I và có vtpt $\overrightarrow{AI}=(0;-3)$ có phương trình $BD:y+1=0$. $N=AM\cap BD\Rightarrow N\left(\dfrac{3}{2};-1\right)$. N là trung điểm của DI $\Rightarrow D(0;-1)\Rightarrow B(6;-1)$

Bài 21: Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hình thoi *ABCD* có tâm $I(3;3)$ và $AC=2BD$. Điểm $M\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N\left(3;\dfrac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD. Viết phương trình đường chéo BD biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3.

Lần 2–Trường GDTX Cam Lâm

Lời giải tham khảo:



➢ Tọa độ điểm *N'* đối xứng với điểm *N* qua *I* là $N'\left(3;\dfrac{5}{3}\right)$

Đường thẳng *AB* đi qua *M*, *N'* có phương trình: $x-3y+2=0$

Suy ra: $IH=d(I,AB)=\dfrac{|3-9+2|}{\sqrt{10}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}$

(Với *H* là chân đường vuông góc từ *I* xuống *AB*)

➢ Do $AC=2BD$ nên $IA=2IB$. Đặt $IB=x>0$, ta có phương trình:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4x^2}=\frac{5}{8}\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

➢ Đặt $B(x,y)$. Do $IB=\sqrt{2}$ $B\in AB$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2=2\\ x-3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y^2-18y+16=0\\ x=3y-2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x=\dfrac{14}{5}\\ y=\dfrac{8}{5}\end{cases}\vee\begin{cases}x=4>3\\ y=2\end{cases}\right.$$

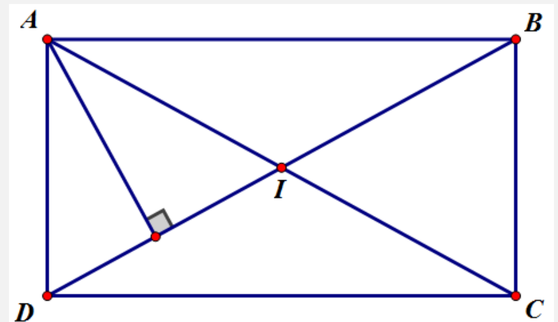
+) Do B có hoành độ nhỏ hơn 3 nên ta chọn $B\left(\frac{14}{5};\frac{8}{5}\right)$

➢ Vậy phương trình đường chéo BD là: $7x-y-18=0$.

Bài 22: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh A(–1; 4) và AB = 2AD. Đường thẳng chứa đường chéo BD có phương trình: x – y + 1 = 0, biết điểm D có hoành độ dương. Viết phương trình đường thẳng chứa đường chéo AC

Đề 2 –Trường GDTX Nha Trang

Lời giải tham khảo:



➢ Gọi $I=AC\cap BD$

+) Ta có: $d(A;BD)=\frac{|-1-4+1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

+) Ta có $\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{5}{4AD^2}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow AD=\sqrt{10}$

+) Tham số hóa điểm $D(d;d+1)\in BD\quad(d>0)$

+) $AD=\sqrt{10}\Leftrightarrow(d+1)^2+(d-3)^2=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=0\quad(l)\\ d=2\end{array}\right.$

Suy ra điểm $D(2;3)$

➢ Phương trình đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AD}=(3;-1)$ làm VTPT và qua A có dạng:

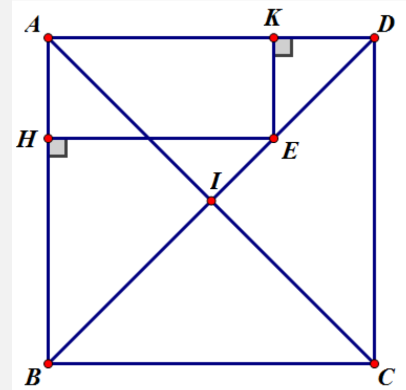
$AB:3x-y+7=0$

➢ $B=AB\cap BD\Rightarrow B(-3;-2)\Rightarrow I\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)\Rightarrow C(0;-3)$

Bài 23: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho hình vuông ABCD. Điểm E(2; 3) thuộc đoạn thẳng BD, các điểm H(-2; 3) và K(2; 4) lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm E trên AB và AD. Xác định toạ độ các đỉnh A, B, C, D của hình vuông ABCD.

Trường THPT Hồng Lĩnh Hà Tĩnh

Lời giải tham khảo:



➢ Ta có: $EH:y-3=0$

$EK:x-2=0$

$\Rightarrow\begin{cases}AH:x+2=0\\ AK:y-4=0\end{cases}\Rightarrow A(-2;4)$

+) Giả sử $\vec{n}=(a;b)$, $(a^2+b^2>0)$ là VTPT của đường thẳng BD.

Có: $ABD=45^0$ nên: $\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\pm b$

+) Với $a=-b$, chọn $b=-1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow BD: x-y+1=0$

$\Rightarrow B(-2;-1); D(3;4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EB}=(-4;-4) \\ \overrightarrow{ED}=(1;1) \end{cases}$

$\Rightarrow E$ nằm trên đoạn BD (t/m)

Khi đó: $C(3;-1)$

+) Với $a=b$, chọn $b=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow BD: x+y-5=0$.

$\Rightarrow B(-2;7); D(1;4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EB}=(-4;4) \\ \overrightarrow{ED}=(-1;1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EB}=4\overrightarrow{ED} \Rightarrow E$ ngoài đoạn BD (L)

➢ Vậy: $A(-2;4); B(-2;-1); C(3;-1); D(3;4)$

Bài 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB và CD. Biết diện tích hình thang bằng 14, đỉnh $A(1;1)$ và trung điểm cạnh BC là $H\left(-\frac{1}{2};0\right)$. Viết phương trình đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D nằm trên đường thẳng $d: 5x-y+1=0$

Lần 3–Trường THPT Lương Tài – Bắc Ninh

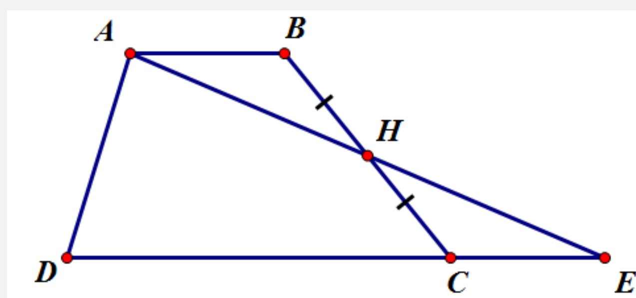
Lời giải tham khảo:

➢ Gọi $E=AH \cap DC$. Dễ thấy $\Delta HAB = \Delta HEC \Rightarrow S_{\Delta ADE} = S_{ABCD} = 14$

+) $AH = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, $AE = 2AH = a\sqrt{13}$;

+) phương trình $AE: 2x-3y+1=0$

$D \in d \Rightarrow D(d;5d+1), d>0$



$S_{ADE} = \frac{1}{2}AE.d(D,AE) = 14 \Leftrightarrow d(D,AE) = \frac{28}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=2 \\ d=\frac{-30}{13}(L) \end{array}\right.$

+) Suy ra $D(2;11)$

+) H là trung điểm AE $\Rightarrow E(-2;-1)$

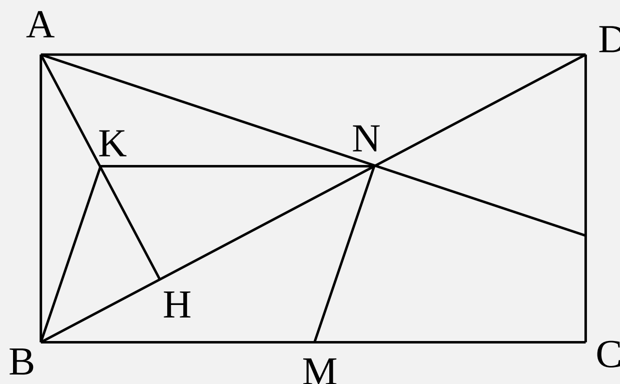
Phương trình CD: $3x-y+5=0$

➢ AB đi qua A và song song với CD $\Rightarrow pt\ AB: 3x-y-2=0$

Bài 25: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BD là $H\left(-\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)$, điểm $M(-1;0)$ là trung điểm cạnh BC và phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ADH có phương trình là $7x+y-3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Lần 2 –Trường THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh

Lời giải tham khảo:



Tính chất hình học: $MN \perp AN$

+) Gọi N, K lần lượt là trung điểm của HD và $AH \Rightarrow NK // AD$ và $NK = \frac{1}{2}AD$.

Do $AD \perp AB \Rightarrow NK \perp AB$.

Mà $AK \perp BD \Rightarrow K$ là trực tâm tam giác ABN.

+) Suy ra $BK \perp AN$ (1)

Vì M là trung điểm BC $\Rightarrow BM = \frac{1}{2}BC$.

Do đó $NK // BM$ và $NK = BM$

+) Suy ra BMNK là hình bình hành $\Rightarrow MN // BK$ (2)

+) Từ (1) và (2) suy ra $MN \perp AN$.

➢ Phương trình MN có dạng: $x - 7y + c = 0$.

$M(-1;0) \in MN \Leftrightarrow -1 - 7.0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.

$\Rightarrow$ phương trình MN là: $x - 7y + 1 = 0$.

➢ Mà $N = MN \cap AN \Rightarrow N\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$. Vì N là trung điểm HD $\Rightarrow D(2;-1)$.

Ta có: $\overrightarrow{HN} = \left(\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right)$

Do $AH \perp HN \Rightarrow$ AH đi qua H và nhận $\vec{n} = (4;-3)$ là 1 VTPT.

$\Rightarrow$ phương trình AH là: $4x - 3y + 9 = 0$.

➢ Mà $A = AH \cap AN \Rightarrow A(0,3)$.

+) Ta có: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2(-1 - x_B) \\ -4 = 2(0 - y_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -2 \\ y_B = 2 \end{cases} \Rightarrow B(-2;2)$.

➢ Vì M là trung điểm BC $\Rightarrow C(0;-2)$.

➢ Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là: $A(0;3), B(-2;2), C(0;-2), D(2;-1)$.

Bài 26: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, có $BC = 2AD$, đỉnh $A(-3;1)$ và trung điểm M của đoạn BC nằm trên đường thẳng $d: x - 4y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$, biết $H(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng CD.

Lần 1–Trường THPT Marie-Curie Hà Nội

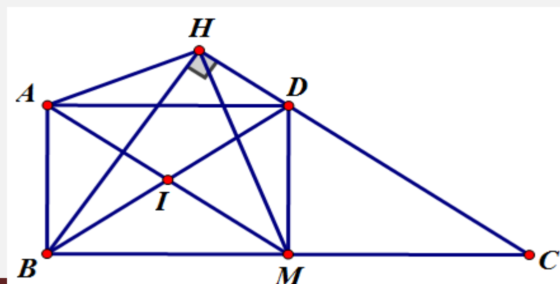
Lời giải tham khảo:

Tính chất hình học: $AH \perp HM$

+) Từ giả thiết ta có $ABMD$ là hình chữ nhật.

+) Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp $ABMD$.

$BH \perp DH \Rightarrow H \in (C) \Rightarrow HA \perp HM$ (*)



➢ $M \in d: x - 4y - 3 = 0 \Rightarrow M(4m + 3; m)$

$\overrightarrow{AH}=(9;-3)$, $\overrightarrow{HM}=(4m-3\,;\,m+2)$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HM}=0$

$\Leftrightarrow 9(4m-3)-3(m+2)=0 \Leftrightarrow m=1$

➢ Suy ra: $M(7;1)$.

+) $ADCM$ là hình bình hành

$\Rightarrow$ DC đi qua $H(6;-2)$ và có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}=(10;0)$

$\Rightarrow$ Phương trình $DC: y+2=0$.

+) $D\in DC: y+2=0 \Rightarrow D(t\,;-2)$

+) $\overrightarrow{AD}=(t+3\,;-3)$, $\overrightarrow{MD}=(t-7\,;-3)$

➢ $AD\perp DM \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MD}=0 \Leftrightarrow (t+3)(t-7)+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2\Rightarrow D(-2;-2) \\ t=6\Rightarrow D(6;-2)\equiv H(loại) \end{array}\right.$

+) Gọi $I=AM\cap BD$ $\Rightarrow I$ là trung điểm AM $\Rightarrow I(2;1)$

I là trung điểm $BD \Rightarrow B(6;4)$

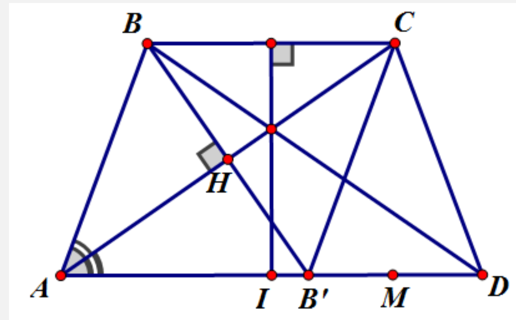
M là trung điểm $BC \Rightarrow C(8;-2)$

➢ Vậy: $B(6;4)$, $C(8;-2)$, $D(-2;-2)$.

Bài 27: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, Cho hình thang cân ABCD với hai đáy AD, BC. Biết B(2; 3) và $AB=BC$, đường thẳng AC có phương trình $x-y-1=0$, điểm $M(-2;-1)$ nằm trên đường thẳng AD. Viết phương trình đường thẳng CD.

Trường THPT Nguyễn Chí Thanh 1

Lời giải tham khảo:



➢ Vì ABCD là hình thang cân nên nội tiếp trong một đường tròn. Mà $BC=CD$ nên AC là đường phân giác của góc BAD.

+) Gọi B′ là điểm đối xứng của B qua AC.

Khi đó $B'\in AD$.

+) Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Suy ra $H(3;2)$.

+) Vì B′ đối xứng với B qua AC nên H là trung điểm của BB′. Do đó $B'(4;1)$.

➢ Đường thẳng AD đi qua M và nhận $\overrightarrow{MB'}$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $AD: x-3y-1=0$. Vì $A=AC\cap AD$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;0)$

➢ Ta có ABCB′ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow C(5;4)$.

+) Gọi d là đường trung trực của BC, suy ra $d: 3x + y - 14 = 0$

+) Gọi $I = AD \cap d$, suy ra I là trung điểm của AD. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right) \Rightarrow D\left(\frac{38}{5};\frac{11}{5}\right)$$

➢ Vậy đường thẳng CD đi qua C và nhận $\overrightarrow{CD}$ làm vecto chỉ phương nên có phương trình $CD: 9x + 13y - 97 = 0$.

Bài 28: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 2. Tâm I là giao của hai đường thẳng $d_1: x - y - 2 = 0$ và $d_2: 2x + 4y - 13 = 0$. Trung điểm M của cạnh AD là giao điểm của d_1 với trục Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết điểm A có tung độ dương.

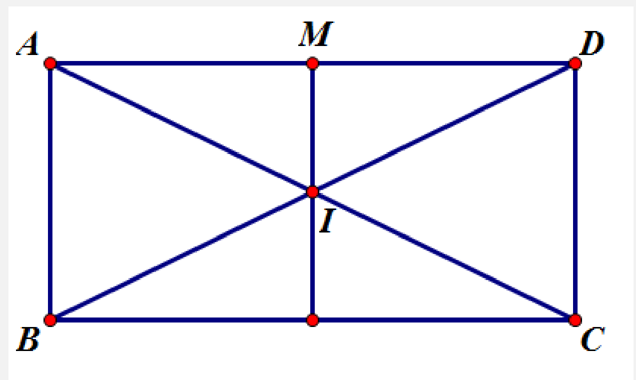
Trường THPT Ngọc Tảo

Lời giải tham khảo:

➢ $I = d_1 \cap d_2 \Rightarrow I\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)$

+) $M = d_1 \cap Ox \Rightarrow M(2;0)$

+) Phương trình đường thẳng AD qua M và nhận $\overrightarrow{MI} = \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ là VTPT có dạng: $AD: x + 3y - 2 = 0$



+) Tham số hóa $A(-3a + 2; a) \in AD \quad (a > 0)$

+) Vì: $\begin{cases} S_{ABCD} = 2 \Rightarrow S_{\Delta AMI} = \frac{1}{4} \\ MI = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{10}}{10}$

+) Nên $10a^2 = \frac{1}{10} \Rightarrow a = \frac{1}{10} \Rightarrow A\left(\frac{17}{10};\frac{1}{10}\right)$

+) Vì AD nhận M là trung điểm nên $D\left(\frac{23}{10};\frac{-1}{10}\right)$

+) AC nhận I làm trung điểm nên $C\left(\frac{53}{10};\frac{29}{10}\right)$

+) BD nhận I làm trung điểm nên $B\left(\frac{47}{10};\frac{31}{10}\right)$

➢ Kết luận: $A\left(\frac{17}{10};\frac{1}{10}\right); B\left(\frac{47}{10};\frac{31}{10}\right); C\left(\frac{53}{10};\frac{29}{10}\right); D\left(\frac{23}{10};\frac{-1}{10}\right)$

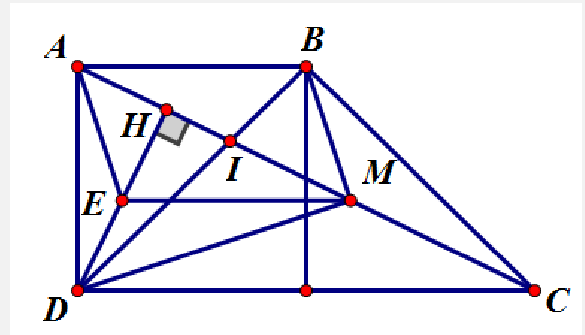
Bài 29: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD $(BAD = ADC = 90^0)$ có đỉnh $D(2;2)$ và $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm

D lên đường chéo AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5};\frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC. Xác định tọa độ các đỉnh A,B,C, biết rằng đỉnh B thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y+4=0$.

Lần 1 –Trường THPT Nguyễn Viết Xuân

Lời giải tham khảo:

Tính chất hình học: $DM\perp BM$



+) Gọi E là trung điểm của đoạn DH. Khi đó tứ giác ABME là hình bình hành $\Rightarrow ME\perp AD$ nên E là trực tâm tam giác ADM. Suy ra $\Rightarrow AE\perp DM$ mà $AE//DM \Rightarrow DM\perp BM$

➢ Phương trình đường thẳng $BM: 3x+y-16=0$

+)Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x+y=16 \end{cases} \Rightarrow B(4;4)$$

+) Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có $\frac{AB}{CD}=\frac{IB}{IC}=\frac{1}{2}\Rightarrow \overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{IB}\Rightarrow I\left(\frac{10}{3};\frac{10}{3}\right)$

+) Phương trình đường thẳng $AC: x+2y-10=0$

+) P hương trình đường thẳng $DH: 2x-y-2=0\Rightarrow H\left(\frac{14}{5};\frac{18}{5}\right)\Rightarrow C(6;2)$

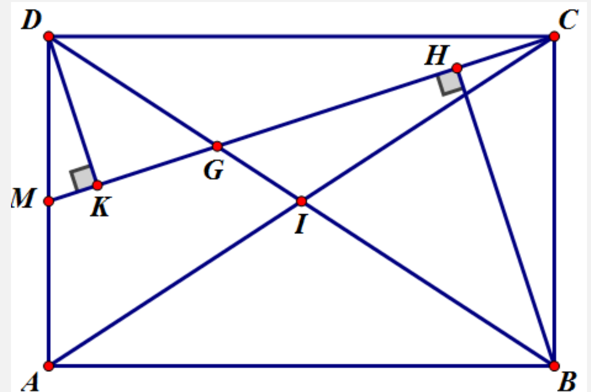
+) Từ $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IA}\Rightarrow A(2;4)$.

➢ Kết luận: $A(2;4)$; $B(4;4)$; $C(6;2)$

Bài 30: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $D(4;5)$. Điểm M là trung điểm của đoạn AD, đường thẳng CM có phương trình $x-8y+10=0$. Điểm B nằm trên đường thẳng $2x+y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và C, biết rằng C có tung độ nhỏ hơn 2.

Lần 1–Trường THPT Phan Bội Châu

Lời giải tham khảo:



➢ Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của B, D lên CM.

$DK=d(D,CM)=\frac{26}{\sqrt{65}}$

+) Gọi $I=BD\cap AC$; $G=BD\cap CM$.

Suy ra, G là trọng tâm ΔACD.

Ta có :

$$DG=2GI\Rightarrow BG=2DG\Rightarrow \frac{BH}{DK}=\frac{BG}{DG}=2\Rightarrow BH=\frac{52}{\sqrt{65}}$$

+) $B(b;-2b-1)$; $d(B;CM)=BH \Leftrightarrow \frac{|17b+18|}{\sqrt{65}}=\frac{52}{\sqrt{65}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=\frac{-70}{17}(l) \end{array}\right.$

(loại vì điểm *B, D* nằm cùng phía với *CM*)

+) Ta có: $B(2;-5) \Rightarrow I(3;0)$

+) $C(8c-10;c) \in CM$; $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow 65c^2-208c+143=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=\frac{11}{5}(l) \end{array}\right.$

➢ Suy ra: $C(-2;1), A(8;-1)$

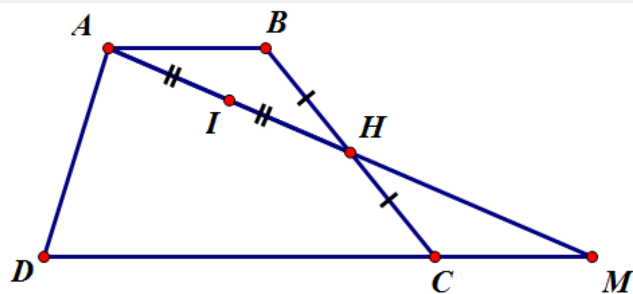
➢ Vậy $A(8;-1), B(2;-5), C(-2;1)$.

Bài 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD với AB//CD có diện tích bằng 14, $H(-\frac{1}{2};0)$ là trung điểm của cạnh BC và $I(\frac{1}{4};\frac{1}{2})$ là trung điểm của AH. Viết phương trình đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D thuộc đường thẳng d: $5x-y+1=0$.

Lần 1–Trường THPT Phan Thúc Trực

Lời giải tham khảo: (Giống bài 24)

➢ Vì I là trung điểm của AH nên A(1;1); Ta có: $AH=\frac{\sqrt{13}}{2}$.



+) Phương trình AH là: $2x-3y+1=0$.

+) Gọi $M=AH\cap CD$ thì H là trung điểm của AM.

+) Suy ra: $M(-2;-1)$. Giả sử $D(d;\ 5d+1)\in d\ \ (a>0)$. Ta có:

+) $\Delta ABH=\Delta MCH \Rightarrow S_{ABCD}=S_{\Delta ADM}=AH.d(D,AH)=14 \Rightarrow d(D,AH)=\frac{28}{\sqrt{13}}$

Hay $|13d+2|=28 \Leftrightarrow d=2(\text{vì } a>0) \Rightarrow D(2;11)$

➢ Vì AB đi qua A(1;1) và có VTCP là $\overrightarrow{MD}=(4;12)$ nên AB có phương trình $AB: 3x-y-2=0$

Bài 32: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AB=2BC. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD; E,F lần lượt là trung điểm đoạn CD và BH. Biết A(1;1), phương trình đường thẳng EF là 3x – y – 10 = 0 và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Lần 2–Trường THPT Quỳnh Lưu 3

Lời giải tham khảo:

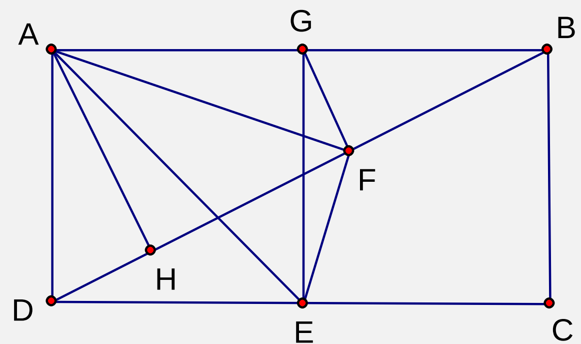
✍ **Tính chất hình học:** $AF\perp EF$

Gọi E,F,G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CD, BH AB. Ta chứng minh $AF\perp EF$.

+) Ta thấy các tứ giác ADEG và ADFG nội tiếp nên tứ giác ADEF cũng nội tiếp, do đó $AF \perp EF$.

+) Đường thẳng AF có pt: $AF: x+3y-4=0$.

+) Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ :



$$\begin{cases}3x-y=10\\x+3y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{17}{5}\\y=\dfrac{1}{5}\end{cases} \to F\left(\frac{17}{5};\frac{1}{5}\right) \to AF=\sqrt{\frac{32}{5}}$$

➢ $\Delta AFE \sim \Delta DCB \to EF=\frac{1}{2}AF=2\sqrt{\frac{2}{5}}$;

$$E(t;3t-10) \to EF^2=\frac{8}{5} \Leftrightarrow \left(t-\frac{17}{5}\right)^2+\left(3t-\frac{51}{5}\right)^2=\frac{8}{5}$$

$\Leftrightarrow 5t^2-34t+57=0 \Leftrightarrow t=3 \vee t=\frac{19}{5}$ hay $E(3;-1) \vee E\left(\frac{19}{5};\frac{7}{5}\right)$

+) Theo giả thiết ta được $E(3;-1)$, phương trình $AE: x+y-2=0$.

+) Gọi D(x;y), tam giác ADE vuông cân tại D nên

$$\begin{cases}AD=DE\\AD\perp DE\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+1)^2\\(x-1)(x-3)=(y-1)(y+1)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=x-2\\(x-1)(x-3)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ hay D(1;-1) ∨ D(3;1)

➢ Vì D và F nằm về hai phía so với đường thẳng AE nên D(1;-1).

➢ Khi đó, C(5;-1); B(1;5). Vậy B(1;5); C(5;-1) và D(1;-1)

Bài 33: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $AB=AD<CD$, điểm $B(1;2)$, đường thẳng BD có phương trình là $y-2=0$. Đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt cạnh AD tại M. Đường phân giác trong góc MBC cắt cạnh DC tại N. Biết rằng đường thẳng MN có phương trình $7x-y-25=0$. Tìm tọa độ đỉnh D.

Lần 1–Sở GD Vĩnh Phúc

Lời giải tham khảo:

✍ **Tính chất hình học:** M và C đối xứng qua BN.

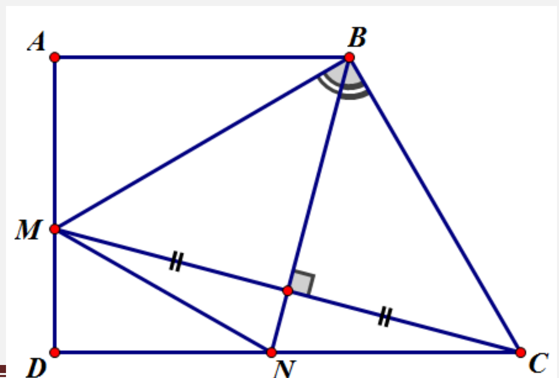
➢ Tứ giác $BMDC$ nội tiếp

$\Rightarrow BMC=BDC=DBA=45^0$

$\Rightarrow \Delta BMC$ vuông cân tại B, BN là phân giác trong MBC

$\Rightarrow M,C$ đối xứng qua BN

Nên cho ta: $AD=d(B,CN)=d(B,MN)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$



+) Do $AB = AD \Rightarrow BD = AD\sqrt{2} = 4$

+) $BD: y-2=0 \Rightarrow D(a;2)$

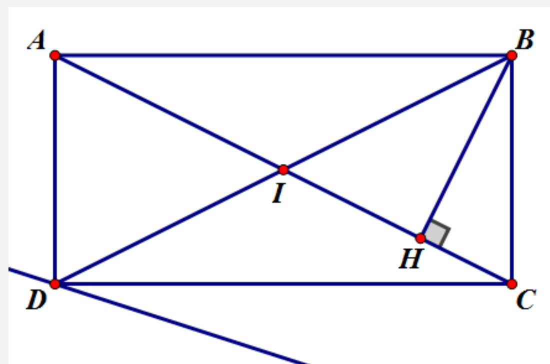
$BD = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \Rightarrow D(5;2) \\ a=-3 \Rightarrow D(-3;2)\ (loai\ cung\ phia\ B\ so\ voi\ MN) \end{array}\right.$

➢ Vậy có một điểm thỏa mãn là: $D(5;2)$

Bài 34: Trong mặt phẳng (Oxy), cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2AD$, đỉnh $A(0;5)$. Đường thẳng Δ qua đỉnh B và vuông góc với AC có phương trình $x-3y-1=0$ và đỉnh D nằm trên đường thẳng d có phương trình $2x-y+7=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật ABCD.

Lần 1–Trường THPT Trần cao Vân-Khánh Hoà

Lời giải tham khảo:



+) $AC \perp \Delta \Rightarrow ptAC: 3x+y-5=0$

+) $H = AC \cap \Delta$ nên tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình:

$\begin{cases} 3x+y=5 \\ x-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$

=) Trong ΔAHB vuông tại B có,

$AB^2 = AH.AC \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB^2}{AB^2 + \frac{AB^2}{4}} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AH} \Rightarrow C(2;-1)$

+) Phương trình đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính IA có dạng: $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=10$

+) $D=(C)\cap d$ nên tọa độ D là nghiệm hệ phương trình:

$\begin{cases} 2x-y+7=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=\frac{29}{5} \end{cases}$. Suy ra: $D(-2;3) \vee D\left(-\frac{3}{5};\frac{29}{5}\right)$

+) $B=(C)\cap\Delta$ nên tọa độ B là nghiệm hệ phương trình:

$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=\frac{14}{5} \end{cases}$. Suy ra $B(4;1) \vee B\left(\frac{-3}{5};\frac{14}{5}\right)$

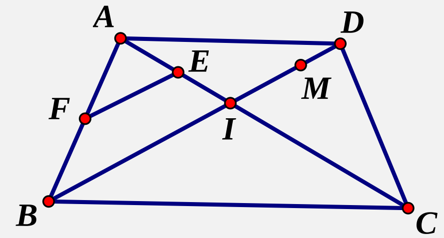
➢ Vì I là trung điểm AD nên $B(4;1)$ và $D(-2;3)$

Bài 35: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ (AD // BC) có phương trình đường thẳng $AB: x-2y+3=0$ và đường thẳng $AC: y-2=0$. Gọi I là giao

điểm của hai đường chéo AC và BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang cân $ABCD$, biết $IB=\sqrt{2}IA$, hoành độ điểm I: $x_I>-3$ và $M(-1;3)$ nằm trên đường thẳng BD.

Lần 2–Trường THPT Tôn Đức Thắng

Lời giải tham khảo:



Tính chất hình học: EF // BD

➢ Ta có A là giao điểm của AB và AC nên $A(1;2)$.

Lấy điểm $E(0;2)\in AC$. Gọi $F(2a-3;a)\in AB$ sao cho EF // BD.

Khi đó $\frac{EF}{BI}=\frac{AE}{AI}\Leftrightarrow\frac{EF}{AE}=\frac{BI}{AI}=\sqrt{2}\Leftrightarrow EF=\sqrt{2}AE$

$\Leftrightarrow(2a-3)^2+(a-2)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=\frac{11}{5}\end{array}\right.$.

➢ Với $a=1$ thì $\overrightarrow{EF}=(-1;-1)$ là vtcp của đường thẳng BD. Nên chọn vtpt của BD là $\vec{n}=(1;-1)$. Phương trình $BD:x-y+4=0\Rightarrow BD\cap AC=I(-2;2)$ $BD\cap AB=B(-5;-1)$

Ta có $\overrightarrow{IB}=-\frac{IB}{ID}\overrightarrow{ID}=-\frac{IB}{IA}\overrightarrow{ID}=-\sqrt{2}\overrightarrow{ID}\Rightarrow D\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2;\frac{3}{\sqrt{2}}+2\right)$.

$\overrightarrow{IA}=-\frac{IA}{IC}\overrightarrow{IC}=-\frac{IA}{IB}\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{IC}\Rightarrow C\left(-3\sqrt{2}-2;2\right)$.

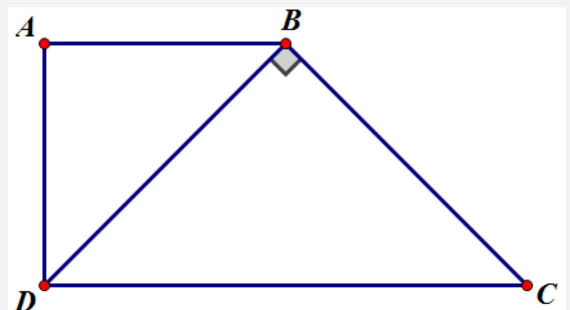
➢ Với $a=\frac{11}{5}$ thì $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{7}{5};\frac{1}{5}\right)$ là vtcp của đường thẳng BD. Nên chọn vtpt của BD là $\vec{n}=(1;-7)$. Do đó, $BD:x-7y+22=0\Rightarrow I(-8;2)$ (loại).

Bài 36: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết AB=AD=2; CD= 4, phương trình $BD:x-y=0$, C thuộc đường thẳng $d:x-4y-1=0$. Tìm tọa độ của A biết điểm C có hoành độ dương.

Lần 1–Trường THPT Trần Bình Trọng

Lời giải tham khảo:

➢ Giả sử $C(4c+1;c)\in d$



➢ Từ giả thiết chứng minh được DB vuông góc với BC và suy ra:

$CB=2\sqrt{2}=d[C,(BD)])$

$\Leftrightarrow\frac{|4c+1-c|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow|3c+1|=4$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3c+1=4\\3c+1=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1\\c=-5/3(loai)\end{array}\right.\Rightarrow C(5;1)$

+) B là hình chiếu của C lên đt BD $\Rightarrow B(3;3)$

➢ Mà AB= 2 nên A thuộc đường tròn có PT $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ (1)

+) Tam giác ABD vuông cân tại A => góc ABD= 45^0=> PT của AB là x= 3 hoặc y= 3

Với x= 3 thế vào (1) giải ra y =1 hoặc y= 5 => A(3; 1) thử lại không thỏa; A(3; 5) thỏa

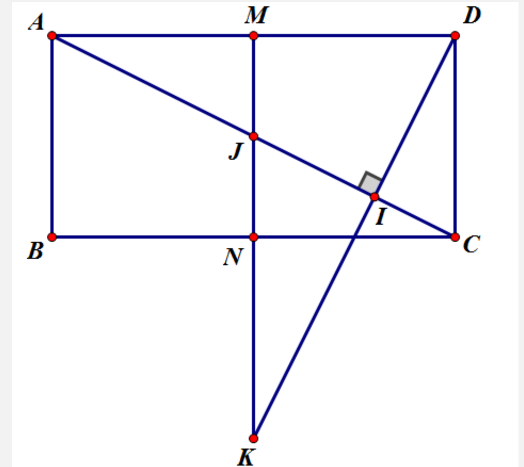
Với y= 3 thế vào (1) giải ra x =1 hoặc x= 5 => A(1; 3) thỏa; A(5; 3) không thỏa.

Bài 37: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 2AB$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Trên đường thẳng MN lấy điểm K sao cho N là trung điểm của đoạn thẳng MK. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết $K(5;-1)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh AC là $2x+y-3=0$ và điểm A có tung độ dương.

Lần 3–Trường THPT Thạch Thành 1 Bắc Ninh

Lời giải tham khảo:

Tính chất hình học : $AC \perp DK$



Ta có $\Delta CAD = \Delta DKM \Rightarrow CAD = DKM$.

Mà $DKM + KDM = 90^\circ \Rightarrow KDM + DAC = 90^\circ \Rightarrow AC \perp DK$.

+) Gọi $AC \cap DK = I$. Tọa độ điểm I thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13}{5} \\ y=-\dfrac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{13}{5};\frac{-11}{5}\right)$$

+) Gọi J là trung điểm giao điểm của MN với AC khi đó J là tâm của hìnhh chữ nhật ABCD.

+) Do tam giác $\Delta KIJ \sim \Delta KMD$

$$\Rightarrow \frac{IK}{KM} = \frac{KJ}{KD} \Rightarrow \frac{IK}{KJ} = \frac{KM}{KD} = \frac{2AB}{\sqrt{4AB^2 + AB^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

+) Ta có: $IK = \sqrt{\left(5-\dfrac{13}{5}\right)^2 + \left(-1+\dfrac{11}{5}\right)^2} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow JK = 3 \Rightarrow KM = 4$

+) Từ đó suy ra: $AI = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$

+) Giả sử $A(a;-2a+3) \in AC \Rightarrow \left(a-\dfrac{13}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{26}{5}-2a\right)^2 = \dfrac{64}{5}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A\left(\dfrac{21}{5};-\dfrac{27}{5}\right) \quad (l) \\ A(1;1) \end{array}\right.$$

+) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{8}{10}\overrightarrow{AC} \Rightarrow C(3;-3) \Rightarrow J(2;-1)$

+) Phương trình đường tròn tâm J, bán kính AJ có dạng: $(C):(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

+) Phương trình $DK: x-2y-7=0$

$$D = KD \cap (C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(1;-3) \Rightarrow B(3;1) \\ D\left(\dfrac{21}{5};-\dfrac{7}{5}\right) \Rightarrow B\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{-3}{5}\right) \end{array}\right.$$

Bài 38: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm I(1;2). Gọi M là trung điểm của AB, đường thẳng DM có phương trình 5x + 3y – 7 = 0, điểm C thuộc đường thẳng d có phương trình 2x – y – 7 = 0. Xác định tọa độ các điểm A,B,C,D biết

điểm D có hoành độ dương.

Lần 1–Trường THPT Thăng Long – Hà Nội

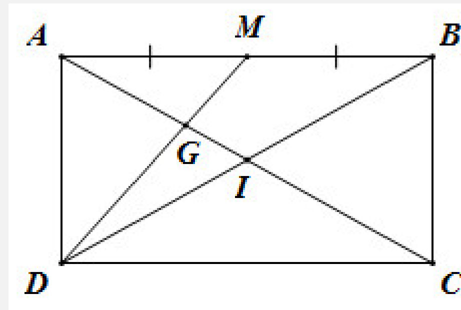
Lời giải tham khảo:

+) Gọi G là trọng tâm tam giác ABD

➢ Giả sử $C(c;2c-7)\in d$

Do $\overrightarrow{CI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CG}\Rightarrow G\left(\frac{4}{3}-\frac{c}{3};5-\frac{2}{3}c\right)$

+) Mà G thuộc DM nên: $5\left(\frac{4}{3}-\frac{c}{3}\right)+3\left(5-\frac{2}{3}c\right)-7=0\Rightarrow c=4$



Nên $C(4;1)\Rightarrow A(-2;3)$

+) Phương trình đường tròn tâm I bán kính AI có dạng:

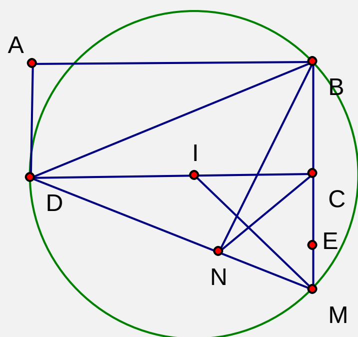
$(C):(x-1)^2+(y-2)^2=10$

Nên $D=DM\cap(C)\Rightarrow D(2;-1)\Rightarrow B(0;5)$

Bài 39: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD.Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD.Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình: $(x-4)^2+(y-1)^2=25$.Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết phương trình đường thẳng CN là: $3x-4y-17=0$; đường thẳng BC đi qua điểm E(7;0) và điểm M có tung độ âm

Lần 1–Trường THPT Xuân Trường, Nam Định

Lời giải tham khảo



+(T) có tâm I(4;1);R=5

+ Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và N,C là chân các đường cao nên chứng minh được :IM⊥ CN

+ Lập ptđt IM qua I và IM⊥ CN : 4(x-4)+3(y-1)=0 ⇔ 4x+3y-19=0

+ M là giao điểm (T) với IM : $\left[\begin{array}{l}M(7;-3)\\M(1;5)\quad(\text{loai})\end{array}\right.$

+Đường thẳng BC qua M,E có pt : x=7

+ C là giao điểm BC và NC => C(7 ;1)

+ B đối xứng M qua C => B(7 ;5)

+ Đường thẳng DC qua C và vuông góc BC : y=1

D là giao điểm (T) và DC : $\left[\begin{array}{l} D(9;1) \\ D(-1;1) \end{array}\right.$

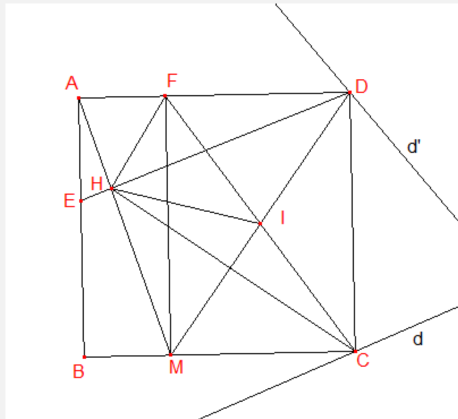
Vì B,D nằm cùng phía với CN nên D(-1 ;1)

+Do $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ => A(-1 ;5)

Bài 40: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho AE = AF. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên DE. Biết $H\left(\frac{2}{5};-\frac{14}{5}\right)$, $F\left(\frac{8}{3};-2\right)$, C thuộc đường thẳng d: x + y – 2 = 0, D thuộc đường thẳng d': $x - 3y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

lần 2–Trường THPT Thuận Thành -Bắc Ninh

Lời giải tham khảo:



Gọi M là giao điểm của AH và BC.

Hai tam giác ADE và BAM bằng nhau nên BM = AE = AF.

Suy ra các tứ giác ABMF, DCMF là các hình chữ nhật..

Gọi I là giao điểm của FC và MD.

Ta có $HI = \frac{1}{2}MD = \frac{1}{2}FC$ nên tam giác HFC vuông tại H.

PT đường thẳng AD: $3x - y - 10 = 0$.

Giả sử A(a; 3a – 10).

DA = DC $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(6;8) \\ A(2;-4) \end{array}\right.$.

Vì $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DA}$ cùng hướng nên A(2; – 4) .

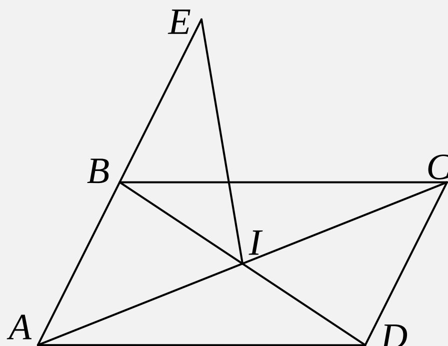
$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \Rightarrow B(-4;-2)$.

Vậy A(2; – 4), $B(-4;-2)$, $C(-2;4)$, $D(4;2)$.

Bài 41: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình bình hành *ABCD* có tâm $I(2\sqrt{3}-2;5)$, $BC = 2AB$, góc $BAD = 60^0$. Điểm đối xứng với *A* qua *B* là $E(-2;9)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành *ABCD* biết rằng *A* có hoành độ âm.

lần 1, Sở giáo dục tỉnh Thanh Hóa

Lời giải tham khảo:



Đặt $AB = m \Rightarrow AD = 2m$.

Ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD\cos 60^0 = 3m^2$.

$\Rightarrow BD = m\sqrt{3}$

Do đó $AB^2 + BD^2 = AD^2$ nên tam giác *ABD* vuông tại *B*, nghĩa là $IB \perp AE$.

$IE^2 = IB^2 + BE^2 = \left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)^2 + m^2 = \frac{7m^2}{4}$.

Mặt khác $IE^2 = (2\sqrt{3})^2 + 4^2 = 28$ nên ta có

$$\frac{7m^2}{4}=28\Leftrightarrow m=4\Rightarrow IB=\frac{m\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$$

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vectơ pháp tuyến của AB ($a^2+b^2>0$) khi đó AB có phương trình $a(x+2)+b(y-9)=0\Leftrightarrow ax+by+2a-9b=0$

Ta lại có $d(I,AB)=IB\Rightarrow\frac{\left|2\sqrt{3}a-4b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow(2\sqrt{3}a-4b)^2=12(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow b(b-4\sqrt{3}a)=0\Leftrightarrow b=0,b=4\sqrt{3}a$

+) Với $b=0$, chọn $a=1$, khi đó AB có phương trình $x+2=0$, suy ra IB có phương trình $y-5=0$. Do $B=AB\cap IB$ nên $B(-2;5)$, mà B là trung điểm của AE nên $A(-2;1)$ (thỏa mãn điều kiện $x_A<0$).

Do I là trung điểm của AC và BD nên ta suy ra $C(4\sqrt{3}-2;9),D(4\sqrt{3}-2;5)$

+) Với $b=4\sqrt{3}a$, chọn a = 1 $\Rightarrow b=4\sqrt{3}$, khi đó AB có phương trình $x+4\sqrt{3}y+2-36\sqrt{3}=0$, suy ra IB có phương trình $4\sqrt{3}(x-2\sqrt{3}+2)-(y-5)=0$.

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}x-y+8\sqrt{3}-19=0$

Do $B=AB\cap IB$ nên $B\left(\frac{16\sqrt{3}-14}{7};\frac{59}{7}\right)$, mà B là trung điểm của AE nên

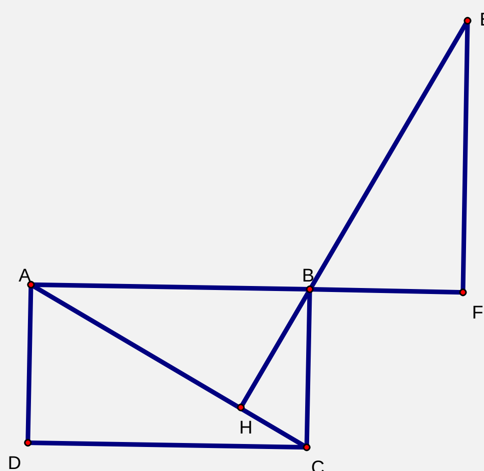
$A\left(\frac{32\sqrt{3}-14}{7};\frac{55}{7}\right)$ (không thỏa mãn điều kiện $x_A<0$).

Vậy $A(-2;1),B(-2;5),C(4\sqrt{3}-2;9),D(4\sqrt{3}-2;5)$

Bài 42: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình $AD:x-2y+3=0$. Trên đường thẳng qua *B* và vuông góc với đường chéo *AC* lấy điểm *E* sao cho $BE=AC$ (*D* và *E* nằm về hai phía so với đường thẳng *AC*). Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết điểm $E(2;-5)$, đường thẳng *AB* đi qua điểm $F(4;-4)$ và điểm *B* có hoành độ dương.

lần 1, Sở giáo dục tỉnh Bắc Giang

Lời giải tham khảo:



Ta có $AB \perp AD: x-2y+3=0$ và AB đi qua $F(4 ; -4)$

$\Rightarrow AB: 2x+y-4=0$. Khi đó $A = AB \cap AD \Rightarrow A(1;2)$

Ta có đường thẳng EF đi qua hai điểm $E(2;-5)$ và $F(4;-4)$. Do đó ta lập được phương trình $EF: x-2y-12=0$

Suy ra $EF \parallel AD \Rightarrow EF \perp AB$ tại F. Khi đó, ta $\Delta ABC = \Delta EFB$ vì $AC = BE, EBF = BCA$ (cùng phụ với HBC) $\Rightarrow AB = EF = \sqrt{5}$.

Ta có $B \in AB: 2x+y-4=0 \Rightarrow B(b;4-2b),\ b>0$.

Vậy $AB = \sqrt{5} \Leftrightarrow (b-1)^2 + (2-2b)^2 = 5 \Leftrightarrow 5b^2 - 10b = 0 \Leftrightarrow b = 2\,(do\, b>0) \Rightarrow B(2;0)$

Ta có $BC \perp AB: 2x+y-4=0$ và BC đi qua $B(2; 0)$ $\Rightarrow BC: x-2y-2=0$

AC đi qua $A(1; 2)$ và vuông góc với BE $\Rightarrow AC$ nhận $\overrightarrow{BE} = (0;-5)$ là véc tơ pháp tuyến

$\Rightarrow AC: -5(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = 2$. Khi đó, ta có $C = AC \cap BC \Rightarrow C(6;2)$

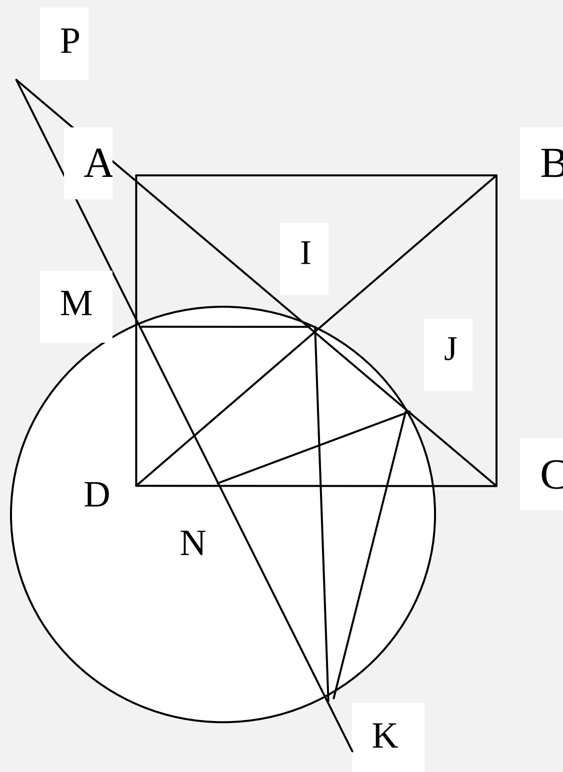
CD đi qua $C(6; 2)$ và $CD \perp AD: x-2y+3=0 \Rightarrow CD: 2x+y-14=0$.

Khi đó $D = CD \cap AD \Rightarrow D(5;4)$. Vậy ta có tọa độ $A(1;2)$, $B(2;0)$, $C(6;2)$, $D(5;4)$.

Bài 43: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, M là trung điểm của đoạn AD, N thuộc đoạn DC sao cho $NC = 3ND$. Đường tròn tâm N qua M cắt AC tại $J(3;1)$, $J \neq I = AC \cap BD$, đường thẳng đi qua M,N có phương trình $: x+y+1=0$. Tìm tọa độ điểm B.

lần 2, THPT Việt Trì, Phú Thọ.

Lời giải tham khảo:



MN cắt đường tròn tâm N tại K .ta chứng mính được tứ giác MIJK nội tiếp
gócNKJ = gócAIM =45^0 ===> góc JNK= 90^0

NJ vuông góc với (MN) nên có phương trình : x-y-2 =0 ===>($N\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Tam giác JMN vuông cân nên $MJ = \sqrt{2}PN \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(3;-4) \\ M(-2;1) \end{array}\right.$

Với M(-2;1) gọi $P = MN \cap JA$ ta có $\overrightarrow{NP} = 3.\overrightarrow{NM} \Rightarrow P(-7;6)$

$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{PJ}$ tìm được A(-3;4) , vì A là trung điểm của IP nên I(1; 2)

Ta có $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow$ B(3;6)

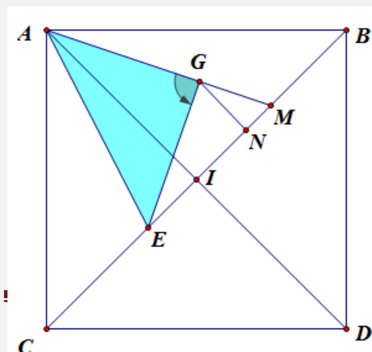
Tương tự Với M(3;-4) t tìm được A(6;-5) , I(4; -1) và B(8;1)

Vậy tọa độ điểm B(3;6) hoặc B(8;1)

Bài 44: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình vuông *ABCD* có tâm *I*. Các điểm $G\left(\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right)$, $E\left(3;-\frac{2}{3}\right)$ lần lượt là trọng tâm của tam giác *ABI* và tam giác *ADC*. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông *ABCD* biết tung độ đỉnh *A* là số nguyên.

lần 2, THPT Thanh Chương 1, Nghệ An.

Lời giải tham khảo:



Gọi M là trung điểm của BI và N là hình chiếu vuông góc của G lên BI.

Ta có: $GN \parallel AI \Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow IN = \frac{2}{3}IM = \frac{1}{3}BI$ (1)

E là trọng tâm ΔACD

$\Rightarrow IE = \frac{1}{3}ID = \frac{1}{3}BI \Rightarrow EN = IN + IE = \frac{2}{3}BI = BN.$

$\Rightarrow BN = EN \Rightarrow \Delta BGE$ cân tại G.

$\Rightarrow GA = GB = GE \Rightarrow$ A, B, E cùng nằm trên đường tròn tâm G.

Phương trình (AG): $\begin{cases} qua\ G \\ \perp AB \end{cases} \Rightarrow (AG): x + 13y - 51 = 0 \to A(51 - 13a; a)$

Khi đó ΔAGE vuông cân tại G $\Rightarrow AG = GE$.

$$\Rightarrow AG^2 = \left(\frac{143}{3} - 13a\right)^2 + \left(a - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{170}{9} \leftrightarrow \left(a - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = \frac{10}{3} \end{array}\right. \to A(-1; 4)$$

Ta có: $AG = \frac{2}{3}AM \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow M\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right)$

Phương trình (BD) đi qua E và M $(BD): 5x - 3y - 17 = 0$

Phương trình đường tròn (G; R=GA): $\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{170}{9}$.

B là giao điểm thứ hai của (BD) và (G) $B(7;6)$.

Bài 45: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ có đỉnh $A(2;-1)$. Giao điểm hai đường chéo AC và BD là điểm $I(1;2)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI có tâm $E\left(-\frac{27}{8}; -\frac{9}{8}\right)$. Biết đường thẳng BC đi qua điểm $M(9;-6)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết điểm B có tung độ nhỏ hơn 3.

lần 2, THPT Cao Lãnh 2, Đồng Tháp.

Lời giải tham khảo

Gọi H là trung điểm DI và K là giao điểm của EI và BC

Ta chứng minh $EK \perp BC$

Thật vậy ta có $EH \perp DI$, góc $DBC = DAC$ (tính chất hình thang cân)

$DAC = IEH$ (góc ở tâm), suy ra $DBC = IEH$

Mặt khác $EIH = BIK$ (đối đỉnh). Do đó $BIK = 90^0 \Rightarrow EK \perp BC$

Ta có $\overrightarrow{EI} = \left(\frac{35}{8}; \frac{25}{8}\right), BC: 7x + 5y - 33 = 0$

$\overrightarrow{AI} = (-1;3); AC: 3x + y - 5 = 0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 7x + 5y - 33 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow C(-1;8)$

$B \in BC \Rightarrow B\left(b; \frac{33 - 5b}{7}\right), b < 3.$ Ta có $IA = IB = \sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow 37b^2 - 228b + 191 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = \frac{191}{37}(l) \end{array}\right. \Rightarrow B(4;1)$$

$IC = ID = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB}.$ Suy ra $D(-5;4)$

Bài 46: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọ H

là hình chiếu vuông góc của *A* trên cạnh *BD* và *M*, *N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *CD*, *BH*. Biết điểm $A(0;-1)$, phương trình đườngthẳng *MN* là $3x-y-9=0$ và điểm *M* có hoành độ nguyên. Tìm toạ độ các đỉnh *B*, *C*, *D*.

lần 1, THPT Chí Linh, Hải Dương.

Lời giải tham khảo

Gọi E là trung điểm của AB thì tứ giác $ADME$ là hình vuông và $EN \perp BH$. Do đó hai tứ giác $ADME$ và $ADNE$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính DE nên $ADMN$ cũng là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ANM} = 90^0 \Rightarrow N$ là hình chiếu của A trên đường thẳng MN.

Đường thẳng AN đi qua $A(0;-1)$

và vuông góc với *MN* nên có phương trình $x+3y+3=0$. Toạ độ điểm N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x-y-9=0 \\ x+3y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{12}{5} \\ y=-\dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{12}{5};-\frac{9}{5}\right)$$

Vì$M \in MN$ nên $M(t;3t-9)$vớit $\in \mathbb{Z}$. Tứ giác $ADMN$ nội tiếp nên $\widehat{MAN}=\widehat{MDN}$ suy ra hai tam giác MNA và BCD đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{AN}{MN}=\frac{CD}{BC}=2 \Rightarrow MN=\frac{1}{2}AN=\frac{1}{2}.\frac{4\sqrt{10}}{5}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow MN^2=\frac{8}{5} \Leftrightarrow \left(t-\frac{12}{5}\right)^2+\left(3t-\frac{36}{5}\right)^2=\frac{8}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{14}{5} \\ t=2 \end{array}\right.$$

Đường thẳng AM có phương trình là$x+y+1=0$. Tam giác ADM vuông cân tại D nên ta tìm được 2 điểm D là$(0;-3)$và $(2;-1)$. Do D và N nằm về hai phía đối với đường thẳng AM nên $D(0;-3)$.

Màt $\in \mathbb{Z}$ nên $t=2 \Rightarrow M(2;-3)$.

M là trung điểm của CD nên ta tính được$C(4;-3)$. Từ đó tính được $B(4;-1)$.

Vậy $B(4;-1), C(4;-3), D(0;-3)$.

Bài 47: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(4;6)$. Gọi M,N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC và CD sao cho $MAN=45^0$, $M(-4;0)$ và đường thẳng MN có phương trình $11x+2y+44=0$. Tìm tọa độ các điểm B,C,D.

lần 2, THPT Chuyên Hạ Long, Quảng Ninh.

Lời giải tham khảo

Gọi $E=BD\cap AN, F=BD\cap AM, I=ME\cap NF$.

Ta có $MAN=NDB=45^0$ nên hai tứ giác $ADNF, ABNE$ nội tiếp. Do đó $ME\perp AN, NF\perp AM$. suy ra $AI\perp MN$.

Gọi $H=AI\cap MN$. Ta có $ABME, MNEF$ là các tứ giác nội tiếp nên $AMB=AEB=AMH$. Suy ra $\Delta AMB=\Delta AMH$. Do đó B là điểm đối xứng của H qua đường thẳng AM

Từ $AH \perp MN$ tại H, tìm được $H\left(-\frac{24}{5};\frac{22}{5}\right)$. Do B là đối xứng của H qua AM, nên tìm được $B(0;-2)$.

Tìm được $BC: 2x+4y+8=0, CD: 2x-y+18=0$. Suy ra $C(-8;-2)$

Từ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ta tìm được $D(-4;10)$.

Bài 48: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $BAD=135^0$ trực tâm tam giác ABD là $H(-1;0)$. Đường thẳng đi qua D và H có phương trình $x-3y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành, biết điểm $G\left(\frac{5}{3};2\right)$ là trọng tâm tam giác ADC.

lần 2, THPT Chuyên Nguyễn Huệ.

Lời giải tham khảo

Ta có $BAD+BHD=180^0 \Rightarrow BHD=45^0$

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ $(a^2+b^2>0)$ là VTPT của đường thẳng HB

Do đường thẳng HB tạo với đường thẳng HD một góc 45^0 nên

$$\cos 45^0=\frac{|a-3b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 2a^2+3ab-2b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2b \\ b=2a \end{array}\right.$$

Nếu $a=-2b$. Chọn $a=2, b=-1$. Phương trình đường thẳng $HB: 2x-y+2=0$.

Do G là trọng tâm tam giác ADC nên $BG=2GD \Rightarrow \overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GD} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow B(1;4), D(2;1)$

Phương trình đường thẳng $AB: 3x+y-7=0$; Phương trình đường thẳng $AD: x+2y+1=0$; suy ra $A(2;1)$ (loại)

Nếu $b=2a$. Phương trình đường thẳng $HB: x+2y+1=0$.

$B(-2b-1;b), D(3d-1;d) \Rightarrow \overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GD} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow B(-5;2), D(5;2)$

Phương trình đường thẳng $AB: 3x+y+13=0$; Phương trình đường thẳng $AD: 2x-y-8=0$; suy ra $A(-1;-10)$

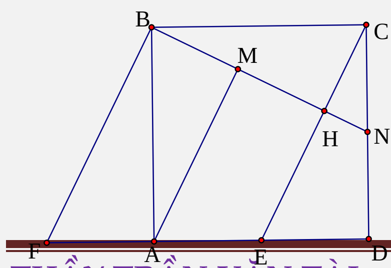
Do $ABCD$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ suy ra $C(1;14)$

Thử lại: $\cos ABD=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ABD=45^0$ (loại)

Bài 49: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi E là trung điểm của cạnh AD và $H\left(\frac{11}{5};-\frac{2}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh CE; $M\left(\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right)$ là trung điểm của cạnh BH. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đỉnh A có hoành độ âm.

lần 2, THPT Cao Nguyên, ĐH Tây Nguyên.

Lời giải tham khảo



Vì M là trung điểm BH nên $M(-1;-2)$

Gọi F đối xứng với E qua A. Khi đó: $BF//EC \Rightarrow$ BFEH là hình thang, có AM là đường trung bình nên $AM \perp BH$

Ta có: $BH: x-2y-3=0$

$CE: 2x+y-4=0, AM: 2x+y=0$

$\cos BAM = \cos ECD = \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

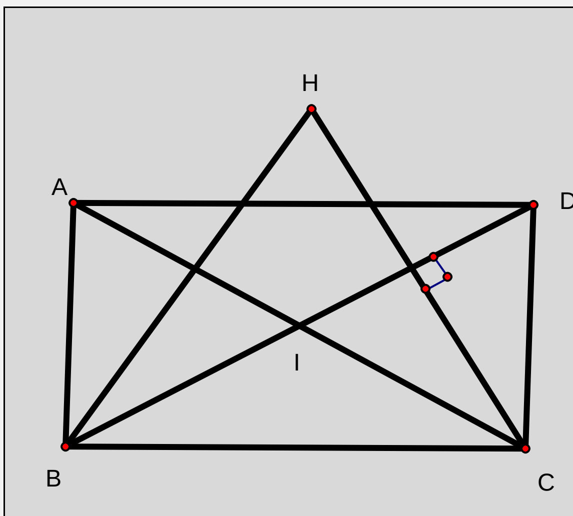
Gọi $A(a;-2a), a<0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (a+1;-2a+2)$

Ta có $\cos BAM = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{AM}}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{u_{AM}}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow 5a^2 - 6a - 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{11}{5}(l) \end{array}\right. \Rightarrow A(-1;2)$

$AD: y-2=0$, vì $E = CE \cap AD \Rightarrow E(1;2)$

Vì E là trung điểm AD nên $D(3;2)$. Vì $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow C(3;-2)$



Bài 50: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng $3\sqrt{3}$, đỉnh D thuộc đường thẳng d: $\sqrt{3}x - y = 0$, $\widehat{ACB} = 30°$. Giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{ABD}$ và đường cao của tam giác BCD kẻ từ C là điểm $H(\sqrt{3};3)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết hoành độ của B và D đều nhỏ hơn $\sqrt{3}$.

Lần 2, THPT Đoàn Thượng, Hải Dương.

Lời giải tham khảo

Gọi $I = AC \cap BD$. Đặt $AB = x \Rightarrow BC = x\sqrt{3}$, có $S = AB.BC = 3\sqrt{3}$ nên $x = \sqrt{3}$.

Ta có $\widehat{DBC} = \widehat{ACB} = 30^0 \Rightarrow \widehat{ABD} = 60^0 \Rightarrow \widehat{HBD} = 30^0 \Rightarrow$ BD là phân giác trong của góc $\widehat{HBC}$ và cũng là đường cao nên BD là trung trực của HC $\Rightarrow HD = CD = \sqrt{3}$; $\widehat{BHD} = \widehat{BCD} = 90^0$ và $BH = BC = 3$.

$D \in d \Rightarrow D(t;\sqrt{3}t)$; $HD = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{T/M}) \\ t = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \ (\text{Loai}) \end{array}\right. \Rightarrow D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Đường thẳng HB đi qua $H(\sqrt{3};3)$, có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{DH} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ nên có phương trình:

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3}) + \dfrac{3}{2}(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 4\sqrt{3} = 0$.

$B \in HD \Rightarrow B\left(b;4-\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$ $(b<\sqrt{3})$.

$$HB=3\Leftrightarrow\left(b-\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\frac{5\sqrt{3}}{2}\ (\text{Loai})\\ b=\frac{-\sqrt{3}}{2}\ (\text{T/M})\end{array}\right.\Rightarrow B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{9}{2}\right).$$

Vậy tọa độ các điểm *B*, *D* là : $B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{9}{2}\right)$; $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$

Bài 51: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho ABCD là hình thang vuông tại A và B sao cho $2AB^2=9BC.AD$. Biết đỉnh C(4,0) và đỉnh D(1,4), trục tung cắt đoạn thẳng AB tại điểm M thỏa mãn MB=2MA. Hãy tìm tọa độ của A, B.

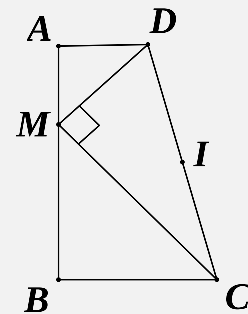
THPT Nguyễn Siêu lần 2.

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết ta có: $MA.MB=BC.AD$. Suy ra hai tam giác AMD và BCM đồng dạng. Từ đó ta có $CMD=90^\circ$.

Gọi I là trung điểm CD ta có $I(\frac{5}{2},2)$.

Vì M nằm trên Oy nên $M=(0,t)$.



Do tam giác MCD vuông tại M nên $MI=\frac{CD}{2}=\frac{5}{2}$.

Suy ra $t=2$. Vậy $M(0,2)$.

Giả sử $A=(x,y)$. Thì $\overrightarrow{AM}=(-x,2-y)$.

Mặt khác $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AM}$ nên $B=(-2x,6-2y)$.

Giải hệ $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{MA}=0$ và $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CB}=0$ ta thu được

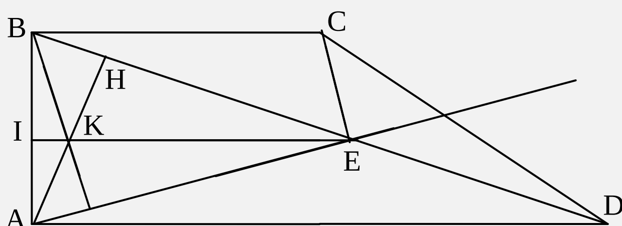
$(x,y)=(0,2)$ (loại)

Hoặc $(x,y)=(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$. Vậy $A=(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$ và B=(1;-1).

Bài 52: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thang ABCD vuông tại A, B và AD = 2BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn HD. Giả sử $H(-1;3)$, phương trình đường thẳng $AE:4x+y+3=0$ và $C\left(\frac{5}{2};4\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang ABCD.

THPT Phan Bội Châu, Bình Định.

Lời giải tham khảo



- Qua E dựng đường thẳng song song với AD cắt AH tại K và cắt AB tại I
  Suy ra: +) K là trực tâm của tam giác ABE, nên BK $\perp$ AE.

  +) K là trung điểm của AH nên $KE \mathbin{//=} \frac{1}{2}AD$ hay $KE \mathbin{//=} BC$

Do đó: $CE \perp AE \Rightarrow$ CE: 2x - 8y + 27 = 0

Mà $E = AE \cap CE \Rightarrow E\left(-\frac{3}{2};3\right)$, mặt khác E là trung điểm của HD nên $D(-2;3)$

- Khi đó BD: y - 3 = 0, suy ra AH: x + 1 = 0 nên A(-1; 1).
- Suy ra AB: x - 2y +3=0. Do đó: B(3; 3).

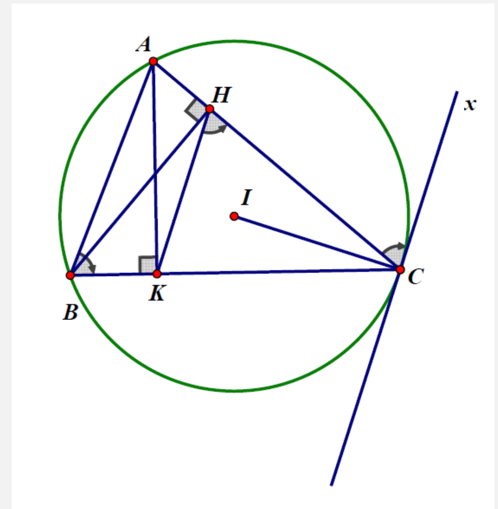
KL: A(-1; 1), B(3; 3) và D(-2; 3)

Phần III. Các bài toán về đường tròn

Bài 1: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*T*) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Các điểm *K*(-1 ; 1), *H*(2; 5) lần lượt là chân đường cao hạ từ *A*, *B* của tam giác *ABC*. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC* biết rằng đỉnh *C* có hoành độ dương.

Lần 2– Trường THPT QG...- BÌNH PHƯỚC

Lời giải tham khảo



✍ **Tính chất hình học:** $HK \perp IC$

➢ (*T*) có tâm $I(1;2)$.

+) Gọi *Cx* là tiếp tuyến của (*T*) tại *C*.

+) Ta có $HCx = ABC = \frac{1}{2}$Sđ AC (1)

+) Do $AHB = AKB = 90^0$ nên *AHKB* là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow ABK = CHK$ (góc trong bằng góc ngoài đối diện của tứ giác nội tiếp) (2)

+) Từ (1) và (2) ta có $HCx = KHC \Rightarrow HK \,//\, Cx$.

Mà $IC \perp Cx \Rightarrow IC \perp HK$.

➢ Do đó *IC* có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{KH}=(3;4)$, *IC* có phương trình: $3x+4y-11=0$

+) Do *C* là giao của *IC* và (*T*) nên tọa độ điểm *C* là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}3x+4y-11=0\\(x-1)^2+(y-2)^2=25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}; \begin{cases}x=-3\\y=5\end{cases}$. Do $x_C>0$ nên $C(5;-1)$

+) Đường thẳng *AC* đi qua *C* và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CH}=(-3;6)$ nên *AC* có phương trình: $2x+y-9=0$.

+) Do *A* là giao của *AC* và (*T*) nên tọa độ điểm *A* là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}2x+y-9=0\\(x-1)^2+(y-2)^2=25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=7\end{cases}; \begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$(loại). Do đó $A(1;7)$

+) Đường thẳng *BC* đi qua *C* và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CK}=(-6;2)$ nên *BC* có phương trình $x+3y-2=0$.

+) Do *B* là giao của *BC* và (*T*) nên tọa độ điểm *B* là nghiệm của hệ

$\begin{cases}x+3y-2=0\\(x-1)^2+(y-2)^2=25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}, \begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$(loại). Do đó $B(-4;2)$

➢ Vậy $A(1;7)$; $B(-4;2)$; $C(5;-1)$.

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại B và C có *AB >CD và CD = BC*. Đường tròn đường kính *AB* có phương trình $x^2+y^2-4x-5=0$ cắt cạnh *AD* của hình thang tại điểm thứ hai *N*. Gọi *M* là hình chiếu vuông góc của *D* trên đường thẳng *AB*. Biết điểm *N* có tung độ dương và đường thẳng *MN* có phương trình: $3x+y-3=0$, tìm tọa độ của các đỉnh *A, B, C, D* của hình thang *ABCD*.

Lần 1– Trường THPT Đa Phúc – Hà Nội

Lời giải tham khảo

Tính chất hình học: NM là phân giác góc ANB

➢ $N = (C) \cap MN \Rightarrow$ tọa độ N là nghiệm của hpt:

$$\begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases}$$

+) Do N có tung độ dương nên $N(\frac{1}{5};\frac{12}{5})$, $N_1(2;-3)$.

➢ Tứ giác BMND nội tiếp $\Rightarrow BNM = BDM = 45^o$

Suy ra MN là đường phân giác góc BNA nên N_1 là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow IN_1 \perp AB$ với I(2;0) là tâm của (C) nên ta có phương trình đường thẳng $AB: y = 0$

➢ $M = MN \cap AB \Rightarrow M(1;0)$, A,B là các giao điểm của đường thẳng AB và (C), giải hệ:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(-1;0); B(5;0) \\ A(5;0); B(-1;0) \end{array}\right.$$

+) Do $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ nên $A(-1;0); B(5;0)$.

➢ Ta lập được phương trình cách đường thẳng:

$AN: 2x - y + 2 = 0;\ MD: y = 1$

+) Mà $D = AN \cap MD \Rightarrow D(1;4)$

+) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MD} \Rightarrow C(5;4)$

➢ Vậy $A(-1;0); B(5;0); C(4;4); D(1;4)$

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhận trục hoành làm đường phân giác trong của góc A, điểm $E(3;-1)$ thuộc đường thẳng BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết điểm A có hoành độ âm.

Lần 3 –Trường THPT Phước Bình

Lời giải tham khảo:

Tính chất hình học: $KI \perp BC$

➢ Đường tròn ngoại tiếp có tâm I(1;5)

+) Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases}$$

+) Do A có hoành độ âm suy ra $A(-4;0)$.

+) Và gọi $K(6;0)$, vì AK là phân giác trong góc A nên $KB = KC$,

do đó $KI \perp BC$ và $\overrightarrow{IK}(-5;5)$ là vtpt của đường thẳng BC.

$\Rightarrow BC: -5(x-3)+5(y+1)=0 \Leftrightarrow -x+y+4=0$.

➢ Suy ra tọa độ B, C là nghiệm của hệ

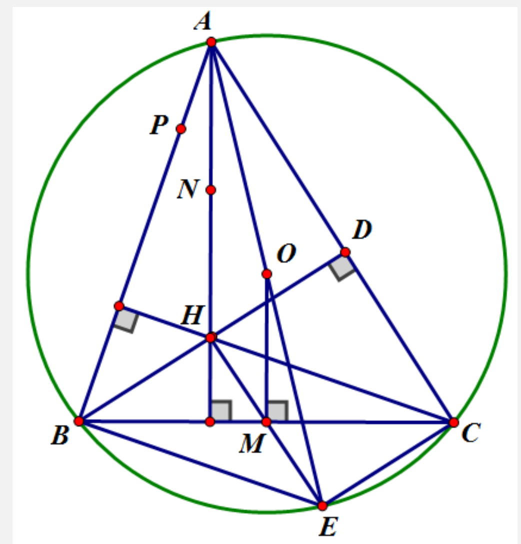
$\begin{cases} x^2+y^2-2x-10y-24=0 \\ -x+y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

➢ Vây A(-4;0), B(8;4), C(2;-2) và A(-4;0), C(8;4), B(2;-2).

Bài 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm và $M(7,1)$ là trung điểm của BC. Điểm $N(4,6)$ là trung điểm của AH. Hình chiếu D của B lên AC thuộc đường thẳng $x-y-1=0$ và đường thẳng AB đi qua điểm P(3,5). Tìm tọa các đỉnh A, B, C biết hoành độ điểm D lớn hơn 5.

Lần 2 –Trường THPT Quang Trung – Bình Phước

Lời giải tham khảo:



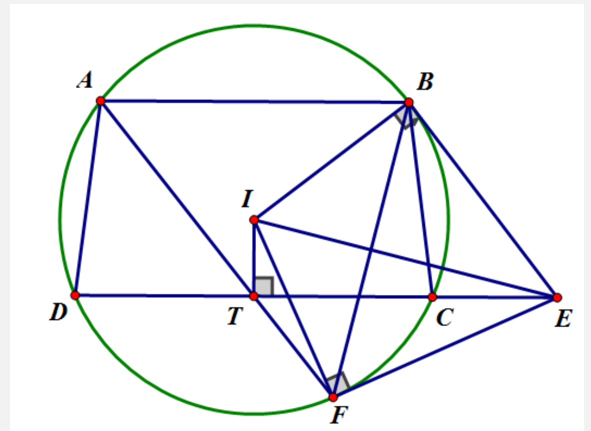
Tính chất hình học:

Chỉ ra $OEHK$ là hình bình hành suy ra *K*. Có $OK \perp CD \Rightarrow$ phương trình *CD*. *C* 1 ẩn suy ra toạ độ *C*. Có *C*, *K* suy ra *D* từ đó có *AH* suy ra *A*, có *A* suy ra *B*. **Nếu muốn bài này khó ta có thể bỏ đi các điểm D, K trong giả thiết mà k làm thay đổi kết quả của bài toán.**

Bài 5: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ (AB // CD) nội tiếp đường tròn tâm $I(5;2)$, bán kính $R=\sqrt{10}$. Tiếp tuyến của (I) tại B cắt CD tại E. F là tiếp điểm của tuyến thứ hai của (I) qua E. AF cắt CD tại $T(5;5)$. Tìm tọa độ A, B biết E thuộc đường thẳng $d: 3x-5y-3=0$ và $x_B > 6$.

Lần 1 –Trường THPT Chuyên Quang Trung- Bình Phước

Lời giải tham khảo:



Tính chất hình học: $TI \perp TE$

+) Ta có: $FIE = BFE = \frac{1}{2} sd\, BF$

+) Mặt khác: $\begin{cases} BFE = FAB \\ FAB = ATD = FTC \end{cases}$

+) Nên suy ra: $FIE = FTE$ nên tứ giác EFTI nội tiếp, cho ta: $ITE = IFE = 90^0$. Vậy $TI \perp TE$

➢ Tham số hóa $E\left(5e;3e-\frac{3}{5}\right)\in d$

+) $\begin{cases}\overrightarrow{IT}=(0;3)\\ \overrightarrow{TE}=\left(5e-5;3e-\frac{28}{5}\right)\Rightarrow E\left(\frac{28}{3};5\right)\\ \overrightarrow{TE}.\overrightarrow{IT}=0\end{cases}$

+) Gọi J là trung điểm IE $\Rightarrow J\left(\frac{43}{6};\frac{7}{2}\right)$. Do tứ giác IBEF nội tiếp đường tròn (C′) tâm J bán kính $R'=\frac{IE}{2}=\frac{5\sqrt{10}}{6}$

+) Nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x-5)^2+(y-2)^2=10\\ \left(x-\frac{43}{6}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{250}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=8\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{128}{25}\\ y=\frac{129}{25}\end{cases}\end{array}\right.$

➢ Vậy điểm $B(8,1)$

+) Phương trình đường thẳng AB qua B và song song với CD có dạng: $AB:y-1=0$

+) $A=AB\cap(C)$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}y-1=0\\(x-5)^2+(y-2)^2=10\end{cases}\Rightarrow A(2;1)$

+) Phương trình đường thẳng CD có dạng: $CD:y-5=0$

+) C,D là nghiệm của hệ: $\begin{cases}y-5=0\\(x-5)^2+(y-2)^2=10\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6\\y=5\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}\end{array}\right.$

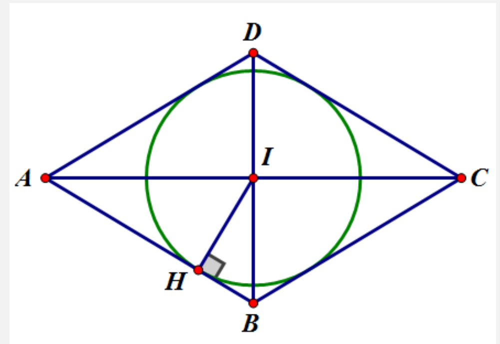
➢ Tìm được $C(6,5),D(4,5)$

➢ Vậy: $A(2;1);B(8;1);C(6;5);;D(4;5)$.

Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+1)^2=20$. Biết rằng AC=2BD và điểm B thuộc đường thẳng $d:2x-y-5=($ Viết phương trình cạnh AB của hình thoi ABCD biết điểm B có hoành độ dương.

Lần 3 –Trường THPT Đồng Xoài - Bình Phước

Lời giải tham khảo



➢ Gọi I là tâm đường tròn (C), suy ra I(1;-1) và I là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng AB .

+) Ta có: $AC = 2BD \Rightarrow IA = 2IB$

+) Xét tam giác IAB vuông tại I, ta có:

$$\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{1}{IH^2}\Rightarrow\frac{5}{4IB^2}=\frac{1}{20}\Rightarrow IB=5$$

+) Tham số hóa điểm $B(b;2b-5)\in d$

➢ $IB=5\Leftrightarrow\sqrt{(b-1)^2+(2b-4)^2}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=4\\ b=-\frac{2}{5}\end{array}\right.\Rightarrow B(4;3)$

+) Gọi $\vec{n}=(a;b)$ $(a^2+b^2\neq 0)$ là VTPT của đường thẳng AB, phương trình đường thẳng AB có dạng: $AB: a(x-4)+b(y-3)=0$

➢ Đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn (C) nên ta có:

$$d(I,AB)=\sqrt{20}\Leftrightarrow\frac{|-3a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{20}$$

$$\Leftrightarrow 11a^2-24ab+4b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{2}{11}b\\ a=2b\end{array}\right.$$

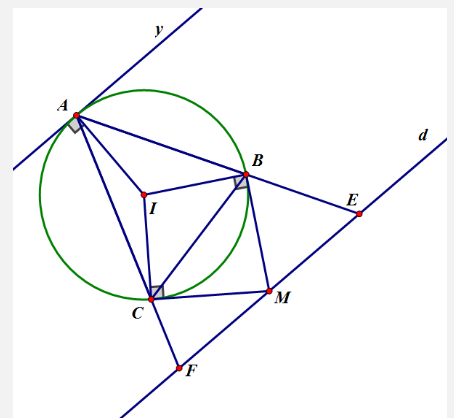
+) Với $a=2b$, chọn $b=1,\ a=2$ $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB là: $2x+y-11=0$

+) Với $a=\frac{2}{11}b$, chọn $b=11,\ a=2\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB là: $2x+11y-41=0$

Bài 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=25$. Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (C) cắt nhau tại điểm M nằm trên đường thẳng d song song với tiếp tuyến tại A của (C). Hai đường thẳng AB và AC cắt d lần lượt tại $E(19;1)$ và $F(3;-11)$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lần 6–Trường THPT chuyên Quang Trung

Lời giải tham khảo:



✍ **Cách 1:**

Tính chất hình học: Tứ giác $EBCF$ nội tiếp đường tròn tâm M, bán kính $\frac{EF}{2}$.

+) Ta có: $ACB = yAB = BEF$ nên tứ giác EBCF nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong đối diện)

+) Mà $MB = MC$ nên dẫn tới M là tâm đường tròn ngoài tiếp tứ giác EBCF đường kính EF, M là trung điểm EF.

➢ Phương trình đường tròn $\left(M;\frac{EF}{2}\right)$ có dạng:

$(C'):(x-11)^2+(y+5)^2=100$

+) B, C là giao điểm của (C) và (C′) $\Rightarrow\begin{cases}(x-11)^2+(y+5)^2=100\\(x-1)^2+y^2=25\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B(1;-5),C(5;3)\\B(5;3),C(1;-5)\end{array}\right.$

➢Tọa độ $A=BE\cap CF$

- B(1;-5), C(5;3), A(4;4)
- B(5,3), C(1,-5), A(2,-4)

✍ **Cách 2:**

➢ Lập phương trình tiếp tiếp tuyến của (C) tại A song song với EF dẫn tới:

$\left[\begin{array}{l}Ay:3x-4y+22=0\\Ay:3x-4y-28=0\end{array}\right.$

➢ TH1: $Ay:3x-4y+22=0$

+) Lập phương trình đường thẳng AI qua tâm $I(1;0)$ và vuông góc với Ay, ta có:

$AI:4x+3y-4=0$

+) $A=AI\cap Ay\Rightarrow A(-2;4)$

+) Tìm tọa độ B,C. Trong đó $B=AE\cap(C);C=AF\cap(C)\Rightarrow B(5;3);C(1;-5)$

➢ TH2: $Ay:3x-4y-28=0$

+) Lập phương trình đường thẳng AI qua tâm $I(1;0)$ và vuông góc với Ay, ta có:

$AI:4x+3y-4=0$

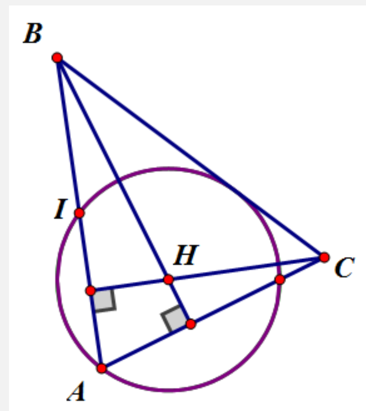
+) $A=AI\cap Ay\Rightarrow A(4;-4)$

+) Tìm tọa độ B,C. Trong đó $B=AE\cap(C);C=AF\cap(C)\Rightarrow B(1;-5),\ C(5,3)$

Bài 8: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh BC là $3x+4y-12=0$, điểm A thuộc đường tròn $C: x-1^{2}+y+4^{2}=25$ và A có tọa độ âm, trung điểm *I* của *AB* thuộc đường tròn (C). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết trực tâm của tam giác trùng với tâm của đường tròn *(C)* và điểm *B* có hoành độ âm.

Trường THPT Hùng Vương lần 2 –Bình Phước

Lời giải tham khảo:



➢ $H\ 1;-4\ ;R=5$

+)Do $\begin{cases}AH\perp BC\\AH\text{ qua H}\end{cases}\Rightarrow AH:4x-3y-16=0$

+) Nên ta có: $A\in AH\cap\ C\ \Rightarrow\left[\begin{array}{l}A\ 4;0\ \ l\\A\ -2;-8\ \ n\end{array}\right.$

➢ Tham số hóa: $B(4b;-3b+3)\in BC$

+) I là trung điểm BC nên có tọa độ: $I\left(2b-1;\dfrac{-3b-5}{2}\right)$

+) Mặt khác: $I \in C \Rightarrow b-2^{\ 2} + \left(\frac{-3b-5}{2}+4\right)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1\ \ n \\ b=3\ \ l \end{array}\right. \Rightarrow B\ -4;6$

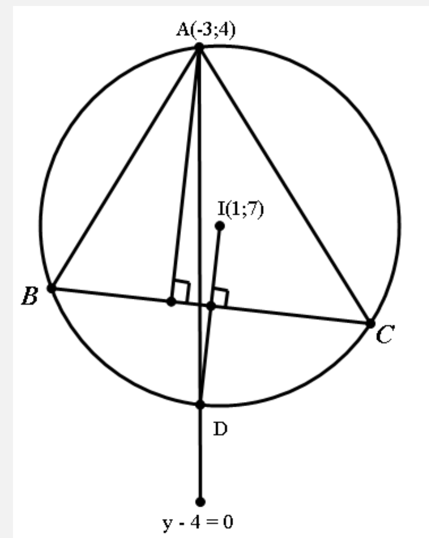
➢ Đường thẳng CH đi qua H và nhận $\overrightarrow{AB}\ -2;14$ làm VTPT suy ra $CH: -x+7y+29=0$

+) Suy ra $C\ 8;-3$

Bài 9: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh A (-3;4), đường phân giác trong của góc A có phương trình : $y-4=0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I(1;7). Viết phương trình cạnh BC, biết diện tích ΔABC gấp 2 lần diện tích ΔIBC.

Lần 1 –Trường THPT Hà Huy Tập

Lời giải tham khảo:



➢ Viết được phương trình đường tròn ngoại tiếp tam gi ác ABC có tâim $I(1;7)$ và bán kính $IA = 5$ là:

$$(x-1)^2+(y-7)^2=25$$

+) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}(x-1)^2+(y-7)^2=25 \\ y-4=0\end{cases}$ để tìm D(5;4)

+) Phương trình đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{ID}=(4;-3)$ làm VTPT nên có dạng $BD: 4x-3y+m=0$

+) Ta có:

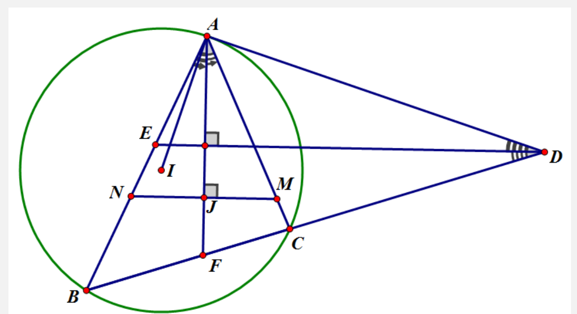
$$S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta IBC} \Rightarrow d\left(A,(BC)\right)=2d(I,(BC)) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=\frac{58}{3}\end{array}\right.$$

➢Vậy (BC): $4x-3y+10=0$ hoặc: $12x-9y+58=0$

Bài 10: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D , đường phân giác trong của ADB có phương trình $x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lần 1–Trường THPT -Khánh Sơn - Khánh Hoà

Lời giải tham khảo:



➢ Gọi AF là phân giác trong của BAC

+) Ta có : $AFD = ABC + BAF$

$FAD = CAD + CAF$

+) Mà $BAF = CAF$, $ABC = CAD$ nên $AFD = FAD$

$\Rightarrow \Delta DAF$ cân tại D $\Rightarrow DE \perp AI$

+) PT đường thẳng AF là : $x+y-5=0$

➢ Gọi N là điểm đối xứng của M qua AF $\Rightarrow$ PT đường thẳng $MN: x-y+5=0$
Gọi $J = AI \cap MN \Rightarrow J(0;5) \Rightarrow N(4;9)$

+) VTCP của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AN}=(3;5) \Rightarrow$ VTPT của đường thẳng AB là $\vec{n}=(5;-3)$

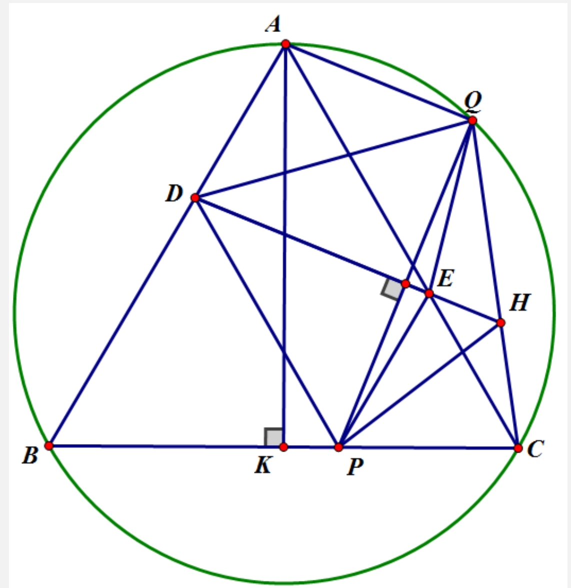
➢ Vậy phương trình đường thẳng AB là: $5(x-1)-3(y-4)=0 \Leftrightarrow 5x-3y+7=0$

Bài 11: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* cân tại *A*, gọi *P* là điểm trên cạnh *BC*. Đường thẳng qua *P* song song với *AC* cắt *AB* tại điểm *D*, đường thẳng qua *P* song song với *AB* cắt *AC* tại điểm *E*. Gọi *Q* là điểm đối xứng của *P* qua *DE*. Tìm tọa độ điểm *A*, biết $B(-2;1)$, $C(2;-1)$ và $Q(-2;-1)$.

Lần 2–Trường THPT Anh Sơn II – Nghệ An

Lời giải tham khảo:

Tính chất hình học: *Q thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*



+) Vì AD// PE, AE// PD nên ADPE là hình bình hành, do đó PD = AE, AD = PE.

+) Gọi H là giao điểm của DE với CQ. Vì P, Q đối xứng nhau qua DE nên :

$DP = DQ, DH \perp PQ, EQ = EP$. Do đó AE= DP= DQ, EQ= EP= AD. Suy ra ADEQ là hình thang cân, nên ADEQ nội tiếp được đường tròn. Vì thế ta có

$DAQ + DEQ = 180^0 \Rightarrow DEQ = 180^0 - DAQ$ (1).

+) Tam giác ABC cân tại A nên tam giác EPC cân tại E, suy ra $EP = EC$. Lại có Q đối xứng với P qua DE nên $EQ = EP$, suy ra $EQ = EP = EC$.

+) Từ đó có $\begin{cases} EQC = ECQ \\ EPH = EQH \end{cases} \Rightarrow EPH = ECH$, suy ra EPCH nội tiếp được đường tròn (2).

➢ Từ (1) và (2) ta được : $BCQ = 180^0 - PEH = 180^0 - QEH = DEQ = 180^0 - DAQ = 180^0 - BAQ$

hay $BCQ + BAQ = 180^0$. Suy ra tứ giác ABCQ nội tiếp, tức Q thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

➢ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua B, C, Q có phương trình là $(C): x^2+y^2=5$.

+) Phương trình đường thẳng BC là $x+2y=0$

+) Tam giác ABC cân tại A nên đường cao AK là $2x-y=0$.

+) Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=-2 \\ x=1, y=2 \end{array}\right.$.

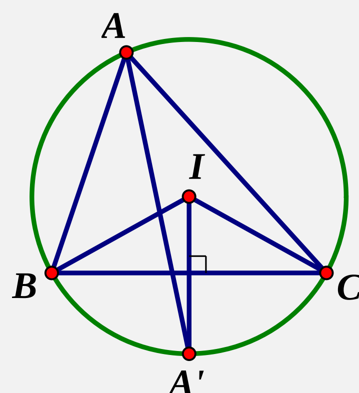
+) Đối chiếu A, Q cùng phía với đường thẳng BC ta nhận điểm.

➢ Vậy $A(-1;-2)$.

Bài 12: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(T): x^2+y^2-4x-2y=0$ và đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y=0$. Biết diện tích tam giác ABC bằng ba lần diện tích tam giác IBC (với I là tâm của đường tròn (T)) và điểm A có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng BC.

Trường THPT Hoàng Hoa Thám

Lời giải tham khảo:



➢ Gọi d là đường phân giác trong của góc A

+) Đường tròn (T) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

+) Khi đó đường thẳng d cắt đường tròn (T) tại A và A' có tọa độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

+) Điểm A có tung độ dương suy ra $A(3;3)$ và $A'(0;0)$

+) Đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{IA'}=(-2;-1)$ làm vtpt nên có dạng:

$$BC: 2x+y+m=0$$

+) Mặt khác ta có:

$$S_{ABC}=3S_{IBC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(A, BC).BC=3.\frac{1}{2}d(I, BC).BC$$

$$\Leftrightarrow d(A, BC)=3.d(I, BC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|m+9|}{\sqrt{5}}=3.\frac{|m+5|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |m+9|=3.|m+5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-6 \end{array}\right.$$

+) Với $m=-3$ khi đó $BC: 2x+y-3=0$

Tọa độ các điểm B, C là: $\left(\frac{6-\sqrt{21}}{5};\frac{3+2\sqrt{21}}{5}\right)$, $\left(\frac{6+\sqrt{21}}{5};\frac{3-2\sqrt{21}}{5}\right)$, suy ra B, C nằm khác phía đối với đường thẳng d (Thỏa)

+) Với $m=-6$ khi đó $BC: 2x+y-6=0$

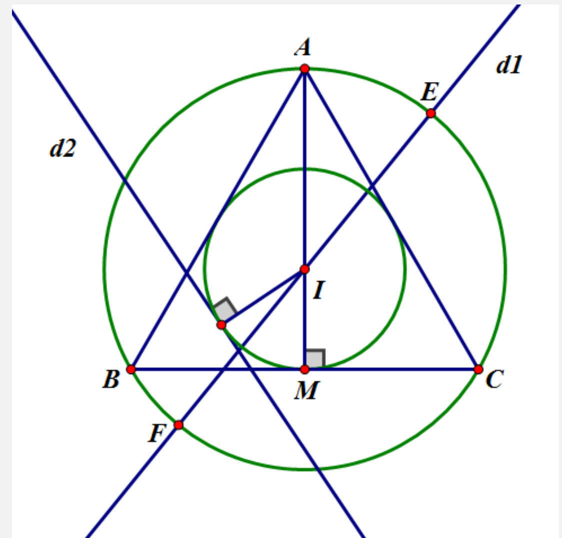
Tọa độ các điểm B, C là: $\left(\frac{12-2\sqrt{6}}{5};\frac{6+4\sqrt{6}}{5}\right)$, $\left(\frac{12+2\sqrt{6}}{5};\frac{6-4\sqrt{6}}{5}\right)$, suy ra B, C nằm khác phía đối với đường thẳng d (Thỏa)

➢ Do đó phương trình đường thẳng BC là : $2x+y-3=0$ và $2x+y-6=0$.

Bài 13: Trong mặt phẳng tọa độ với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1: x-2y+2=0, d_2: 3x-3y+\sqrt{6}=0$ và tam giác ABC đều có diện tích bằng $\sqrt{3}$ và trực tâm I thuộc d_1. Đường thẳng d_2 tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ giao điểm d_1 và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết điểm I có hoành độ dương.

Lần 2–Trường THPT Đồng Dậu – Vĩnh Phúc

Lời giải tham khảo:



➢ Gọi $M = AI \cap BC$. Giả sử $AB = x(x>0), R, r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC

+) Do tam giác ABC đều nên

$$S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x = 2$$

+) Do tam giác ABC đều nên trực tâm I là tâm đường tròn ngoại tiếp , nội tiếp tam giác ABC

$$\Rightarrow r = IM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

+) Giả sử $I(2a-2;a) \in d_1 (a>1)$

+) Do d_2 tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên:

$$d(I;d_2) = r \Leftrightarrow \frac{|3(2a-2)-3a+\sqrt{6}|}{\sqrt{9+9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow |3a-6+\sqrt{6}| = \sqrt{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{6-2\sqrt{6}}{3} < 1 (l) \\ a = 2 \end{array}\right.$$

+) Suy ra $I(2;2)$.

➢ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I và bán kính $R = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC

là : $(x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{3}$

+) Giao điểm của đường thẳng (d_1) và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

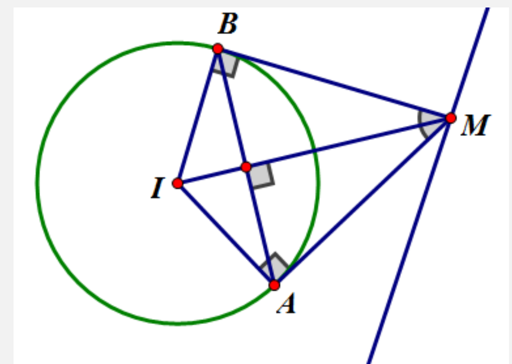
$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

➢ Vậy giao điểm của (d_1) và (d_2) là $E(2+\frac{2}{\sqrt{15}};2+\frac{4}{\sqrt{15}}), F(2-\frac{2}{\sqrt{15}};2-\frac{4}{\sqrt{15}})$

Bài 14: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) và đường thẳng Δ định bởi: $(C): x^2+y^2-4x-2y=0;\ \Delta: x+2y-12=0$. Tìm điểm M trên Δ sao cho từ M vẽ được tới (C) hai tiếp tuyến lập với nhau một góc 60^0.

Lần 1 –Trường GDTX Cam Lâm

Lời giải tham khảo:



➢ Đường tròn (C) có tâm I(2;1) và bán kính $R = \sqrt{5}$.

+) Gọi A, B là hai tiếp điểm của (C) với hai tiếp của (C) kẻ từ M. Nếu hai tiếp tuyến này lập với nhau một góc 60^0 thì tam giác IAM là nửa tam giác đều suy ra $IM = 2R = 2\sqrt{5}$.

+) Như thế điểm M nằm trên đường tròn (T) có phương trình: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$.

+) Mặt khác, điểm M nằm trên đường thẳng Δ, nên tọa

độ của M nghiệm đúng hệ phương trình: $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=20 & (1)\\ x+2y-12=0 & (2)\end{cases}$

Khử x giữa (1) và (2) ta được:

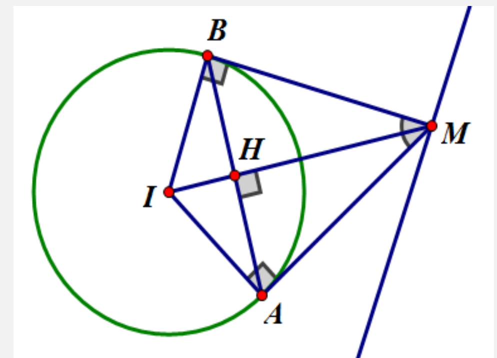
$$(-2y+10)^2+(y-1)^2=20 \Leftrightarrow 5y^2-42y+81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{27}{5}\end{array}\right.$$

➤ Vậy có hai điểm thỏa mãn đề bài là: $M\left(3;\dfrac{9}{2}\right)$ hoặc $M\left(\dfrac{27}{5};\dfrac{33}{10}\right)$

Bài 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=9$ và đường thẳng $(d): x+y-10=0$. Từ điểm M trên (d) kẻ hai tiếp tuyến đến (C), gọi A, B là hai tiếp điểm. Tìm tọa độ điểm M sao cho độ dài đoạn $AB=3\sqrt{2}$

Đề 1 –Trường GDTX Nha Trang

Lời giải tham khảo:



➤ Đường tròn (C) có tâm $I(3;1), bk\ R=OA=3$

+) Gọi $H=AB\cap IM$, do H là trung điểm của AB nên $AH=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

+) Suy ra: $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{9-\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

và $IM=\dfrac{IA^2}{IH}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

+) Gọi $M(m;10-m)\in(d)$ ta có $IM^2=18 \Leftrightarrow (m-3)^2+(9-m)^2=18$

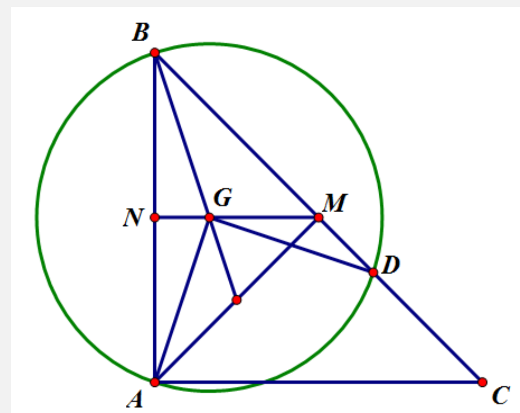
$2m^2-24m+90=18 \Leftrightarrow m^2-12m+36=0 \Leftrightarrow m=6$

➤ Vậy $M(6;4)$

Bài 16: Cho ΔABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm ΔABM, điểm $D(7;-2)$ là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA=GD$. Tìm tọa độ điểm A, lập phương trình AB, biết hoành độ của A nhỏ hơn 4 và AG có phương trình $3x-y-13=0$.

Lần 1–Trường THPT- Hậu Lộc 2- Thanh Hoá

Lời giải tham khảo:



➤ Ta có $d(D;AG)=\dfrac{|3.7-(-2)-13|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

+) ΔABM vuông cân $\Rightarrow GA=GB \Rightarrow GA=GB=GD$

+) Vậy G là tâm đường tròn ngoại tiếp ABD

$\Rightarrow AGD=2ABD=90^0 \Rightarrow \Delta GAD$ vuông cân tại G.

Do đó $GA=GD=d(D;AG)=\sqrt{10} \Rightarrow AD^2=20;$

➤ Gọi $A(a;3a-13); a<4$

$AD^2=20 \Leftrightarrow (a-7)^2+(3a-11)^2=20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5(loai) \\ a=3 \end{array}\right.$

+) Vậy $A(3;-4)$

+) Gọi VTPT của AB là $\vec{n}_{AB}(a;b)$

$\cos NAG = \left|\cos\left(\vec{n}_{AB},\vec{n}_{AG}\right)\right| = \dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}}$ (1)

+) Mặt khác $\cos NAG = \dfrac{NA}{AG} = \dfrac{NM}{\sqrt{NA^2+NG^2}} = \dfrac{3NG}{\sqrt{9.NG^2+NG^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ (2)

+) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 6ab+8b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 3a=-4b \end{array}\right.$

Với $b=0$ chọn $a=1$ ta có $AB: x-3=0;$

Với $3a=-4b$ chọn $a=4; b=-3$ ta có $AB: 4x-3y-24=0$

+) Nhận thấy với $AB: 4x-3y-24=0$ thì $d\left(D;AB\right) = \dfrac{|4.7-3.(-2)-24|}{\sqrt{16+9}} = 2 < d\left(D;AG\right) = \sqrt{10}$

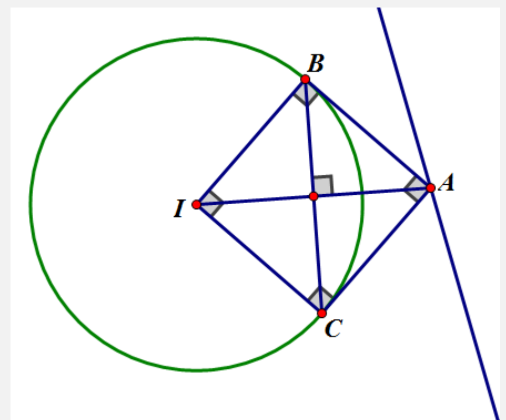
(loại)

➢ Vậy $AB: x-3=0.$

Bài 17: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn có phương trình : $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ (C) và đường thẳng : $d: x+y+m=0$. Tìm m để trên đường thẳng (d) có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) . (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

Lần 1 –Trường THPT Kẻ Sặt Hải Dương

Lời giải tham khảo:



➢ Tâm đt (C) là: $I(1;-2)$, bk $R=3$, từ A kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC $\Rightarrow$AB=AC , AB$\perp$AC $\Rightarrow$ABIC là hình vuông cạnh 3 $\Rightarrow$IA= $3\sqrt{2}$

➢ $A(a;-a-m)\in d$; AI = $\sqrt{(1-a)^2+(a+m-2)^2} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow (1-a)^2+(a+m-2)^2=18$

$\Rightarrow 2a^2+2(m-3)a+m^2-4m-13=0$ (1).

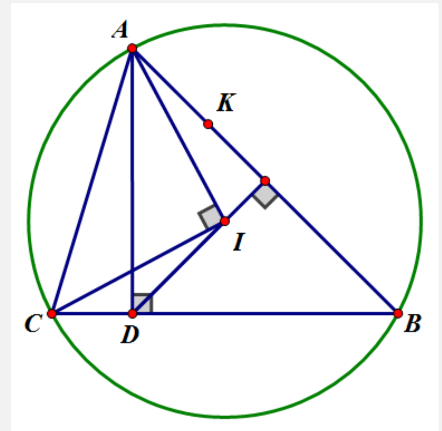
+) Để có duy nhất điểm A tức là phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

$\Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow m^2-2m-35=0 \to m=-5; m=7.$

Bài 18: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $I(1;-2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp và $AIC=90^0$. Hình chiếu vuông góc của A trên BC là $D(-1;-1)$. Điểm K(4; - 1) thuộc đường thẳng AB. Tìm tọa độ các đỉnh A, C biết điểm A có tung độ dương.

Lần 1 –Trường THPT Khoái Châu – Hưng Yên

Lời giải tham khảo:



Tính chất hình học: $ID \perp AB$

+) Do $AIC = 90^0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} ABC = 45^0 \\ ABC = 135^0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow ABD = 45^0$ nên ΔADB vuông cân tại D

Do đó DA = DB. Lại có: IA = IB $\Rightarrow DI \perp AB$

➢ Nên đường thẳng AB đi qua (4; - 1) và vuông góc với DI có phương trình $2x - y - 9 = 0$. +) Gọi $A(a; 2a-9) \in AB$, do

$DA = \sqrt{2}d(D;AB) = 2\sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2 + (2a-8)^2} = 2\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;-7)\ (loại) \\ A(5;1)\ (t/m) \end{array}\right.$

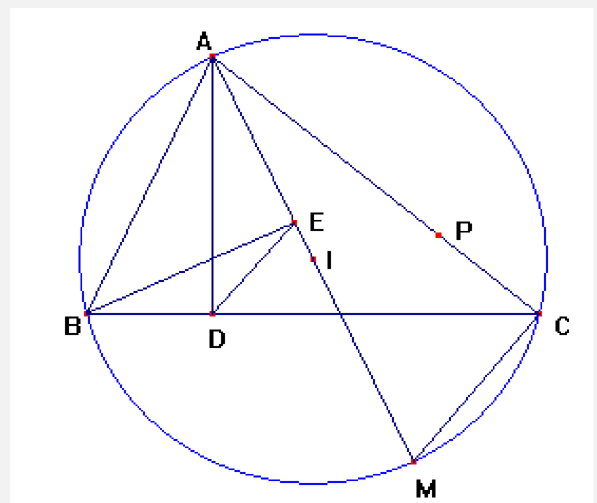
+) Phương trình DB đi qua D có VTPT $\overrightarrow{AD} \Rightarrow$ AD : $3x + y + 4 = 0$; $C \in DB \Rightarrow C(c; -3c-4)$.

➢ Do ΔIAC vuông cân tại I nên $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = 0 \Leftrightarrow 4(c-1) - 3(3c+2) = 0 \Leftrightarrow c = -2 \Rightarrow C(-2;2)$

Bài 19: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm I; có đỉnh A thuộc đường thẳng d: x + y - 2 = 0, D(2; -1) là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ đỉnh A. Gọi điểm E(3; 1) là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AI; điểm P(2;1) thuộc đường thẳng AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Trường THPT Lê Quý Đôn – Khánh Hoà

Lời giải tham khảo:



Tính chất hình học: $DE \perp AC$

+) Gọi M là điểm đối xứng của A qua I.

+) Ta có $BCM = BAM = EDC$ (Do tứ giác ABDE nội tiếp).

Từ đó suy ra $DE // MC$ mà $MC \perp AC \Rightarrow DE \perp AC$. Ta có $\overrightarrow{DE} = (1;2)$.

+) $AC: 1(x-2) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$.

➢ Ta có $\{A\} = d \cap AC$. Tọa độ của A thỏa hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0;2)$.

+) Ta có $\overrightarrow{AD} = (2;-3)$, $\overrightarrow{AE} = (3;-1)$.

Phương trình BE : $3(x-3) - (y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 8 = 0$.

Phương trình BD : $2(x-2) - 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 7 = 0$. $\{B\} = BE \cap BD$

➢ Tọa độ của B thỏa hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ 2x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{17}{7}; -\frac{5}{7}\right)$.

➢ Ta có $\{C\} = AC \cap BD$, nên Tọa độ của C thỏa hệ phương trình

$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ 2x-3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{26}{7} \\ y=\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right)$.

➢ Kết luận : $A(0;2)$, $B\left(\frac{17}{7};-\frac{5}{7}\right)$, $C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right)$

Bài 20: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;2), B(3;4)$ và đường thẳng d có phương trình: $d: x-2y-2=0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao cho: $MA^2+MB^2=36$.

Lần 1 –Trường THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh

Lời giải tham khảo:

➢ Giả sử $M(2m+2;m)\in d$

+) $MA^2+MB^2=36 \Leftrightarrow (2m+3)^2+(m-2)^2+(2m-1)^2+(m-4)^2=36$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M(4;1) \\ M\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right) \end{array}\right.$

Bài 21: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;6)$, chân đường phân giác trong góc A là $D\left(2;-\frac{3}{2}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(\frac{-1}{2};1\right)$ .Tìm tọa độ các điểm B và C.

Trường THPT Khánh Hoà

Lời giải tham khảo:

➢ Phương trình đường thẳng $AD: x-2=0$.

+) Phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC :

$(C): \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{125}{4}$

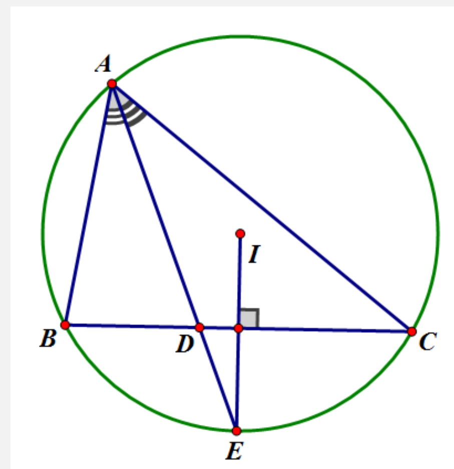
+) Gọi E là giao điểm của AD và (C) $\Rightarrow E(2;-4)$

+) E là điểm chính giữa cung BC không chứa điểm A $IE\perp BC$

+) Phương trình đường thẳng $BC: x-2y-5=0$

+) B, C là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn (C)

➢ $B(5;0); C(-3;-4)$ hoặc $B(-3;-4);\ C(5;0)$



Bài 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhận trục hoành làm đường

phân giác trong của góc A, điểm $E(3;-1)$ thuộc đường thẳng BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2+y^2-2x-10y-24=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết điểm A có hoành độ âm.

Lần 2 –Trường THPT Như Xuân – Thanh Hoá

Lời giải tham khảo:

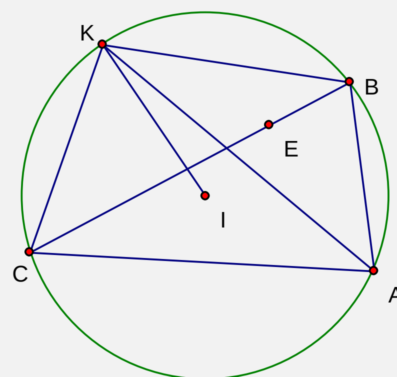
+) Đường tròn ngoại tiếp có tâm I(1;5)

➢ Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-10y-24=0\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=-4\\ y=0\end{cases}$$

+) Do A có hoành độ âm suy ra A(-4;0).

+) Và gọi K là giao điểm của phân giác trong góc A với (C), nên suy ra K(6;0).



Vì AK là phân giác trong góc A nên KB=KC, do đó $KI\perp BC$ và

+) $\overrightarrow{IK}(-5;5)$là vtpt của đường thẳng BC.

$\Rightarrow BC:-5(x-3)+5(y+1)=0\Leftrightarrow -x+y+4=0$.

➢ Suy ra tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-10y-24=0\\ -x+y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=4\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$$

➢ Vây A(-4;0), B(8;4), C(2;-2) và A(-4;0), C(8;4), B(2;-2) .

Bài 23: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AC. Biết $M(3;-1)$ là trung điểm của cạnh BD, điểm $C(4;-2)$ Điểm $N(-1;-3)$ nằm trên đường thẳng đi qua B và vuông góc với AD. Đường thẳng AD đi qua $P(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D.

Lần 2–Trường THPT Phan Bội Châu

Lời giải tham khảo:

➢ Giả sử $D(a;b)$. Vì M là trung điểm của BC nên $B(6-a;2-b)$

+) $AD\perp DC\Rightarrow BN//CD\Rightarrow \overrightarrow{BN},\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

➢ Ta có:

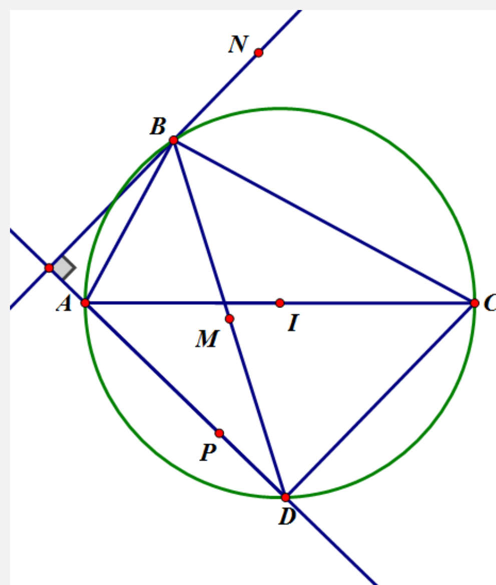
+) $\overrightarrow{BN}=(a-7;b-1)$, $\overrightarrow{CD}=(a-4;b+2)$

$\Rightarrow(a-7)(b+2)=(a-4)(b-1)\Leftrightarrow b=a-6\ (1)$

+) $\overrightarrow{PD}=(a-1;b-3)$, $\overrightarrow{CD}=(a-4;b+2)$

$\overrightarrow{PD}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow(a-1)(a-4)+(b-3)(b+2)=0\ (2)$

Thế (1) vào (2) ta được $2a^2-18a+40=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\ a=4\end{array}\right.$



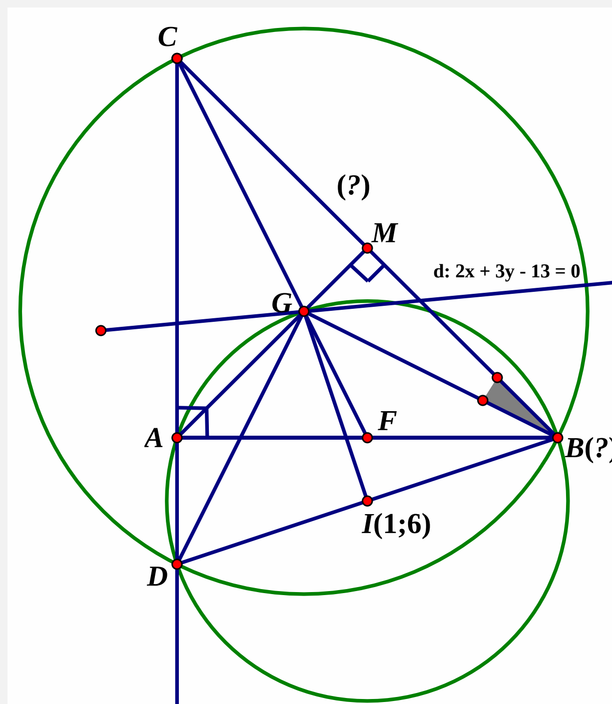
$a = 4 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow D(4;-2)$ loại vì D trùng C

$a = 5 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow D(5;-1)$ và $B(1;-1)$

+) AD qua $P(1;3), D(5;-1) \Rightarrow AD: x + y - 4 = 0$

+) $AB \perp BC$ và đi qua $B(1;-1) \Rightarrow AB: 3x - y - 4 = 0$

➢ $A = AB \cap AD \Rightarrow A(2;2)$



Bài 24: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Điểm D thuộc tia đối của tia AC sao cho $GD = GC$. Biết điểm G thuộc đường thẳng $d: 2x + 3y - 13 = 0$ và tam giác BDG nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0$. Tìm toạ độ điểm B và viết phương trình đường thẳng BC, biết điểm B có hoành độ âm và toạ độ điểm G là số nguyên.

Lần 1–Trường THPT Phù Cừ Hưng Yên

Lời giải tham khảo:

➢ Tam giác ABC vuông cân tại A có G là trọng tâm nên GB = GC

Mà GD = GC nên tam giác BCD nội tiếp đường tròn tâm G.

+) Suy ra:

$BGD = 2BCD = 2BCA = 90^0 \Rightarrow BG \perp GD$

Hay tam giác BDG vuông cân tại G

➢ Đường tròn (C) tâm I(1;6) bán kính $R = \sqrt{10}$ ngoại tiếp tam giác BDG nên I là trung điểm của BD

Do đó $IG = \sqrt{10}$ và $IG \perp BD$

=) Vì $G \in d: 2x + 3y - 13 = 0 \Rightarrow G\left(m; \dfrac{13-2m}{3}\right)$

Từ $IG = \sqrt{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} G(2;3) \\ G\left(-\dfrac{28}{13}; \dfrac{75}{13}\right) \end{array}\right.$, do toạ độ điểm G là số nguyên nên G(2;3).

BD đi qua I(1;6) và $IG \perp BD$ nên phương trình $BD: x - 3y + 17 = 0$

$B, D \in BD \cap (C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-2;5) \\ D(4;7) \end{array}\right.$ *(do hoành độ điểm B âm)*

➢ Vậy $\boxed{B(-2;5)}$

+) Gọi M là trung điểm của BC ta có AM = MB = MC (do ABC vuông cân tại A)

Suy ra $AM \perp BC \Rightarrow GM \perp MB$ và $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}MB$

Nên $\tan GBM = \frac{MG}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos GBM = \frac{3}{\sqrt{10}}$

+) Gọi $\vec{n} = (a,b)$ với $(a^2 + b^2 \neq 0)$ là VTPT của BC.

Ta có VTCP của BG là $\overrightarrow{BG} = (4;-2) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BG}} = (1;2)$ là VTPT của BG

+) Có $\cos(BG,BC) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_{BG}},\vec{n}\right)\right| \Leftrightarrow \cos GBM = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_{BG}},\vec{n}\right)\right| \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\left|\overrightarrow{n_{BG}}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{BG}}\right|.\left|\vec{n}\right|}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{|a+2b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}} \Leftrightarrow 35a^2 - 40ab + 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ 7a-b=0 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: Với $a - b = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1;1)$ nên phương trình $BC: x + y - 3 = 0$

Trường hợp 2: Với $7a - b = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1;7)$ nên phương trình $BC: x + 7y - 33 = 0$

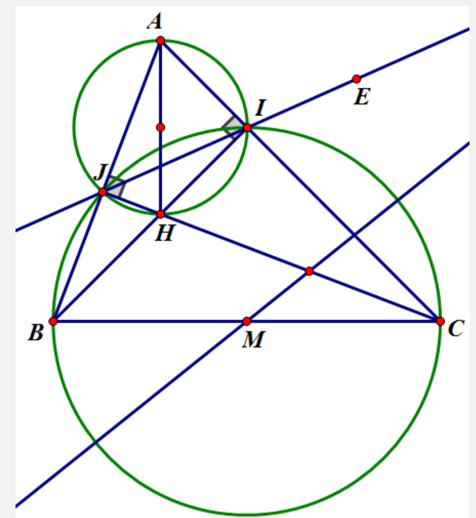
Do hai điểm D và G cùng mằn về một phía đối với đường thẳng BC nên phương trình BC thoả mãn là $\boxed{x + y - 3 = 0}$

➢ **Vậy** $\boxed{BC: x + y - 3 = 0}$ và $\boxed{B(-2;5)}$

Bài 25: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh A(-2; -1) và trực tâm H(2; 1). Cạnh BC = $\sqrt{20}$. Gọi I, J lần lượt là chân các đường cao hạ từ B, C. Trung điểm của BC là điểm M thuộc đường thẳng d: x – 2y – 1 = 0 và M có tung độ dương. Đường thẳng IJ đi qua điểm E(3; - 4). Viết phương trình đường thẳng BC.

Lần 1–Trường THPT Phú Xuyên B

Lời giải tham khảo:



➢ Tứ giác AIHJ nội tiếp đường tròn đường kính AH, có phương trình:

$(C): x^2 + y^2 = 5$

Vì M thuộc d nên tọa độ M(2b + 1 ; b).

+) Đường tròn tâm M, đường kính BC có pt :

$(C'): (x - 2b - 1)^2 + (y - b)^2 = 5$

+) Dễ thấy I, J thuộc đường tròn (C′). Vậy I, J là giao điểm của 2 đường tròn (C), (C′) nên pt IJ có dạng :

$$x^2 + y^2 - 5 = x^2 + y^2 - 2(2b+1)x - 2by + (2b+1)^2 + b^2 - 5$$

$$\Leftrightarrow 2(2b+1)x + 2by - (2b+1)^2 - b^2 = 0$$

+) Vì IJ qua E nên ta có $b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$. Mà b > 0 nên b = 1 suy ra M(3; 1)

➢ Đường thẳng BC qua M, có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AH}$.

➢ Vậy phương trình BC: $2x + y - 7 = 0$

Bài 26: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2);B(3;4)$ và đường thẳng $d: y-3=0.$,Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A,B và cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt M,N sao cho $MAN=60^0$.

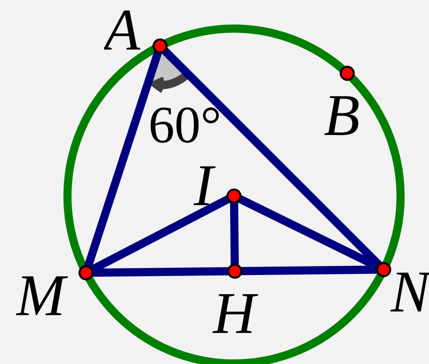
Lần 1–Trường THPT Nguyễn Văn Trỗi

Lời giải tham khảo:

+) Gọi $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (đk $a^2+b^2-c>0$)

$\begin{cases} A(1;2)\in(C) \\ B(3;4)\in(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2a-4b+c=0 \\ 25-6a-8b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5-a \\ c=15-2a \end{cases}$ .Vậy

$I(a;-a+5)$



+) Bán kính $R=\sqrt{a^2+(5-a)^2-(15-2a)}=\sqrt{2(a^2-4a+5)}$

+) $MAN=60^0$. Suy ra $MIN=120^0 \Rightarrow IMN=INM=30^0$

hạ $IH\perp(d)\Rightarrow IH=d(I,d)=\frac{1}{2}R$

$\Leftrightarrow |2-a|=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2-4a+5)} \Leftrightarrow a^2-4a+3=0 \Rightarrow a=1 \vee a=3$

Khi $a=1$ ta có đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-8y+13=0$ (loại do I,A khác phía đường thẳng d)

Khi $a=3 \Rightarrow$

$(C): x^2+y^2-6x-4y+9=0 \Leftrightarrow (C): (x-3)^2+(y-2)^2=4$ (t/ mãn)

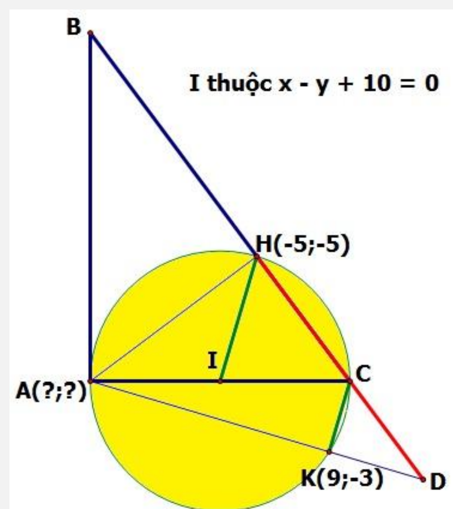
PHẦN PHỤ TRỢ THAM KHẢO

BÀI 1: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AD. Giả sử $H(-5;-5), K(9;-3)$ và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng $x-y+10=0$. Tìm tọa độ điểm A.*

(KÌ THI THPT QUỐC GIA 2015 – ĐỀ CHÍNH THỨC).

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Có thể thấy "hình vẽ" chính là điểm tựa để ta giải quyết bài toán này, do đó việc vẽ "chính xác" hình vẽ có ý nghĩa quan trọng vì hình vẽ giúp ta "phát hiện các tính chất hình học quan trọng". Cụ thể trong bài này, AHCK chính là tứ giác nội tiếp, và IH ⊥ AK. Và bài toán cũng từ đó mà được phân tích theo các hướng sau:



+ **Hướng thứ 1**: Chứng minh AHCK là tứ giác nội tiếp → IH = IK và I ∈ d → tìm tọa độ I. Để chứng minh IH ⊥ AK → ta có thể chứng minh IH // CK (do CK // AD) (phần chứng minh này xin dành cho bạn đọc). → Khi đó A thỏa mãn A thuộc đường tròn đường kính AC và đường thẳng AK.

+ **Hướng thứ 2**: Tương tự hướng thứ 1, ta tìm tọa độ điểm I, để chứng minh IH ⊥ AK → ta gắn hệ trục tọa độ Axy và chứng minh $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IH}=0$ → Khi đó A thỏa mãn A thuộc đường tròn đường kính AC và đường thẳng AK.

+ **Hướng thứ 3**: Tương tự hướng thứ 1, ta tìm tọa độ điểm I, đến đây ta có thể đặt A(x; y) → 2 ẩn nên cần 2 phương trình → pt (1) là IA = IH, pt (2) là AH = HK (ta phải chứng minh ΔAHK cân tại H).

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có $\angle AHC=\angle CKA=90^o \Rightarrow \angle AHC+\angle CKA=180^o$

⇒ tứ giác AHCK nội tiếp.

Gọi I là trung điểm AC ⇒ I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác AHCK

⇒ IK = IH (*)

Mặt khác I ∈ d: x – y + 10 = 0 ⇒ $I(t;t+10)$.

Do đó

$(*) \Leftrightarrow HI^2=KI^2 \Leftrightarrow (t+5)^2+(t+15)^2=(t-9)^2+(t+13)^2 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow \boxed{I(0;10)}$

* ΔABD cân tại A (do AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến)

⇒ $\angle ABD=\angle BDA$

Mặt khác $\begin{cases} \angle ABD + \angle BCA = 90^o \\ \angle DBA + \angle DCK = 90^o \end{cases} \Rightarrow \angle BCA = \angle DCK$.

Mà $\angle CHI = \angle HCI$ (do ΔIHC cân tại I)

Suy ra $\angle CHI = \angle KCD \Rightarrow$ KC // IH (đồng vị) mà CK ⊥ AD ⇒ $\boxed{IH \perp AD}$

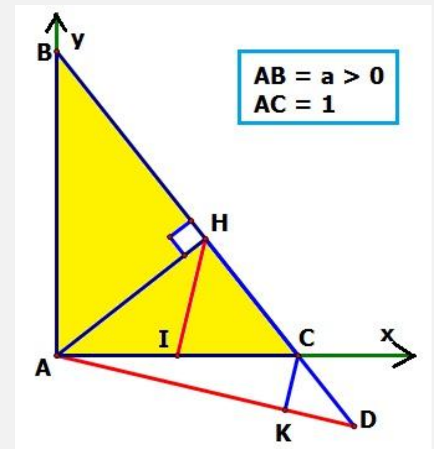
* Đường AD qua K(9; – 3) nhận $\overrightarrow{IH} = (-5;-15) = -5(1;3)$ làm vecto pháp tuyến có dạng là:

$1(x-9)+3(y+3)=0 \Leftrightarrow \boxed{AD: x+3y=0}$

* A là giao điểm AD và đường tròn đường kính AC nên tọa độ A thỏa mãn hê:

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x^2+(y-10)^2=250 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \Rightarrow x=-15 \\ y=-3 \Rightarrow x=9 \end{array}\right.$$



Suy ra A(–15;5) hay A(9;–3) (loại vì trùng K)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-15;5)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có $\angle AHC = \angle CKA = 90^o$

$\Rightarrow \angle AHC + \angle CKA = 180^o$

⇒ tứ giác AHCK nội tiếp.

Gọi I là trung điểm AC

⇒ I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác AHCK ⇒ IK = IH (*)

Mặt khác I ∈ d: x – y + 10 = 0

$\Rightarrow I(t;t+10)$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow HI^2 = KI^2$

$\Leftrightarrow (t+5)^2+(t+15)^2=(t-9)^2+(t+13)^2 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow \boxed{I(0;10)}$

* Đặt AB = a, AC = 1. Dựng hệ trục Axy như hình vẽ.

Ta có $A(0;0), B(0;a), C(1;0)$

Ta có

$$BH.BC = AB^2 \Leftrightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{a^2}{a^2+1} \Rightarrow \overrightarrow{BH} = \frac{a^2}{a^2+1}\overrightarrow{BC} \Rightarrow H\left(\frac{a^2}{a^2+1}; \frac{a}{a^2+1}\right)$$

Ta có H là trung điểm BD

$\Rightarrow D\left(\frac{2a^2}{a^2+1}; \frac{-a^3+a}{a^2+1}\right)$ và $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ là tung điểm AC.

Nên $\begin{cases} \overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{a^2-1}{2(a^2+1)}; \dfrac{a}{a^2+1}\right) \\ \overrightarrow{AD} = \left(\dfrac{2a^2}{a^2+1}; \dfrac{-a^3+a}{a^2+1}\right) \end{cases}$.

Xét $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2(a^2-1)+a(-a^3+a)}{(a^2+1)^2} = 0 \Rightarrow IH \perp AD$

* Đường AD qua K(9; – 3) nhận $\overrightarrow{IH} = (-5;-15) = -5(1;3)$ làm vecto pháp tuyến có dạng là: $1(x-9)+3(y+3)=0 \Leftrightarrow \boxed{AD: x+3y=0}$

* A là giao điểm AD và đường tròn đường kính AC nên tọa độ A thỏa mãn hê:
$\begin{cases} x+3y=0 \\ x^2+(y-10)^2=250 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \Rightarrow x=-15 \\ y=-3 \Rightarrow x=9 \end{array}\right.$ suy ra A(–15;5) hay A(9;–3) (loại vì trùng K)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-15;5)}$

► Hướng dẫn giải cách 3:

* Ta có $\angle AHC = \angle CKA = 90^o \Rightarrow \angle AHC + \angle CKA = 180^o \Rightarrow$ tứ giác AHCK nội tiếp.

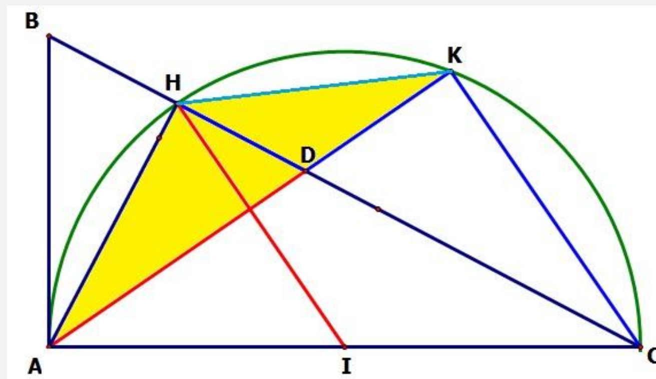
Gọi I là trung điểm AC $\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác AHCK

$\Rightarrow$ IK = IH (*)

Mặt khác I ∈ d: x – y + 10 = 0 $\Rightarrow$ $I(t;t+10)$.

Do đó

$(*) \Leftrightarrow HI^2 = KI^2 \Leftrightarrow (t+5)^2+(t+15)^2 = (t-9)^2+(t+13)^2 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow \boxed{I(0;10)}$



* Xét đường tròn nội tiếp tứ giác AHKC ta có

$\angle AKH = \angle ACH = \angle HAB = \angle HAD \Rightarrow \Delta AHK$ cân tại H

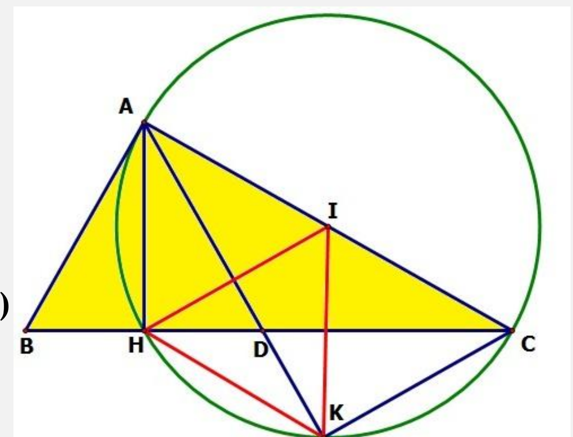
Suy ra AH = HK.

Đặt A(x; y) ta có A thỏa mãn

$\begin{cases} x^2+(y-10)^2=250 \\ (x-5)^2+(y+5)^2=250 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \Rightarrow x=-15 \\ y=-3 \Rightarrow x=9 \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-15;5)}$

► Hướng dẫn giải cách 4: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)



* Gọi I là trung điểm AC ta có $IH = IK = \dfrac{AC}{2}$ nên I thuộc đường trung trực của HK.

Đường trung trực HK có phương trình $7x+y-10=0$ nên toa độ I thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x-y+10=0 \\ 7x+y-10=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(0;10)}$$

* Ta có $\angle HKA = \angle HCA = \angle HAB = \angle HAD$ nên ΔAHK cân tại H, suy ra HA = HK mà MA = MK nên A đối xứng với K qua MH. Ta có $\overrightarrow{MH} = (5;15) = 5(1;3)$. Đường thẳng MH có phương trình: $3x-y+10=0$

* Trung điểm AK thuộc MH và AK ⊥ MH nên A thỏa mãn hệ:

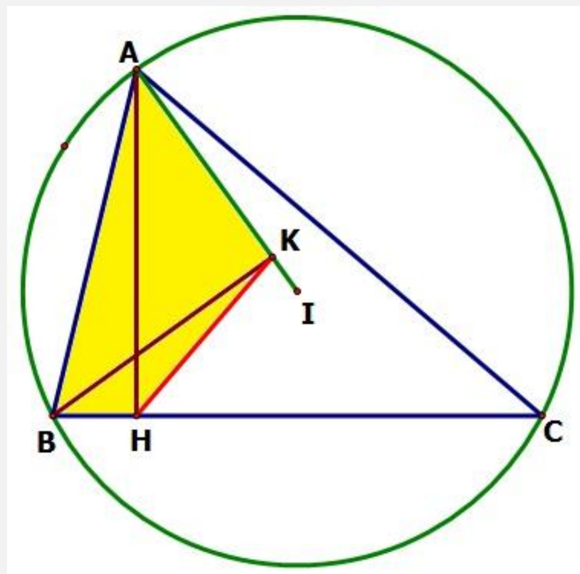
$$\begin{cases} (x-9)+3(y+3)=0 \\ 3\left(\dfrac{x+9}{2}\right)-\left(\dfrac{y-3}{2}\right)+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-15 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-15;5)}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-15;5)}$

BÀI 2: ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, K là hình chiếu vuông góc của B trên AI. Giả sử*** $A(2;5), I(1;2)$, ***điểm B thuộc đường thẳng*** $3x+y+5=0$, ***đường thẳng HK có phương trình*** $x-2y=0$. ***Tìm tọa độ các điểm B, C.*** \

(KÌ THI THPT QUỐC GIA 2015 – ĐỀ DỰ BỊ).

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có B thuộc đường tròn tâm I bán kính IA và đường thẳng d: 3x + y + 5 = 0 nên thỏa hệ: $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=10 \\ 3x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-2;1)}$

* Ta có H ∈ HK ⇒ $H(2h;h)$ và $\overrightarrow{AH}=(2h-2;h-5), \overrightarrow{BH}=(2h+2;h-1)$.

Lại có AH ⊥ BH

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow (2h-2)(2h+2)+(h-5)(h-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h=1 \\ h=\frac{1}{5} \end{array}\right.$

Do đó ta có : $H(2;1)$ hay $H\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$

* Với $H\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$ ta có $\overrightarrow{AI} = (-1;-3)$, $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{-8}{5};\frac{-24}{5}\right) = \frac{8}{5}(-1;-3)$ nên ba điểm A, H, I thẳng hàng hay tam giác này cân tai A (không thỏa mãn) nên ta loại $H\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$ và nhận $\boxed{H(2;1)}$

* Phương trình đường BC khi đó là y – 1 = 0 và C là giao điểm của đường tròn tâm I bán kính IA và BC nên tọa độ C thỏa hệ:

$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2 = 10 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, y=1 \\ x=4, y=1 \end{array}\right.$. Do B(–2;1) nên ta nhận $\boxed{C(4;1)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-2;1), C(4;1)}$